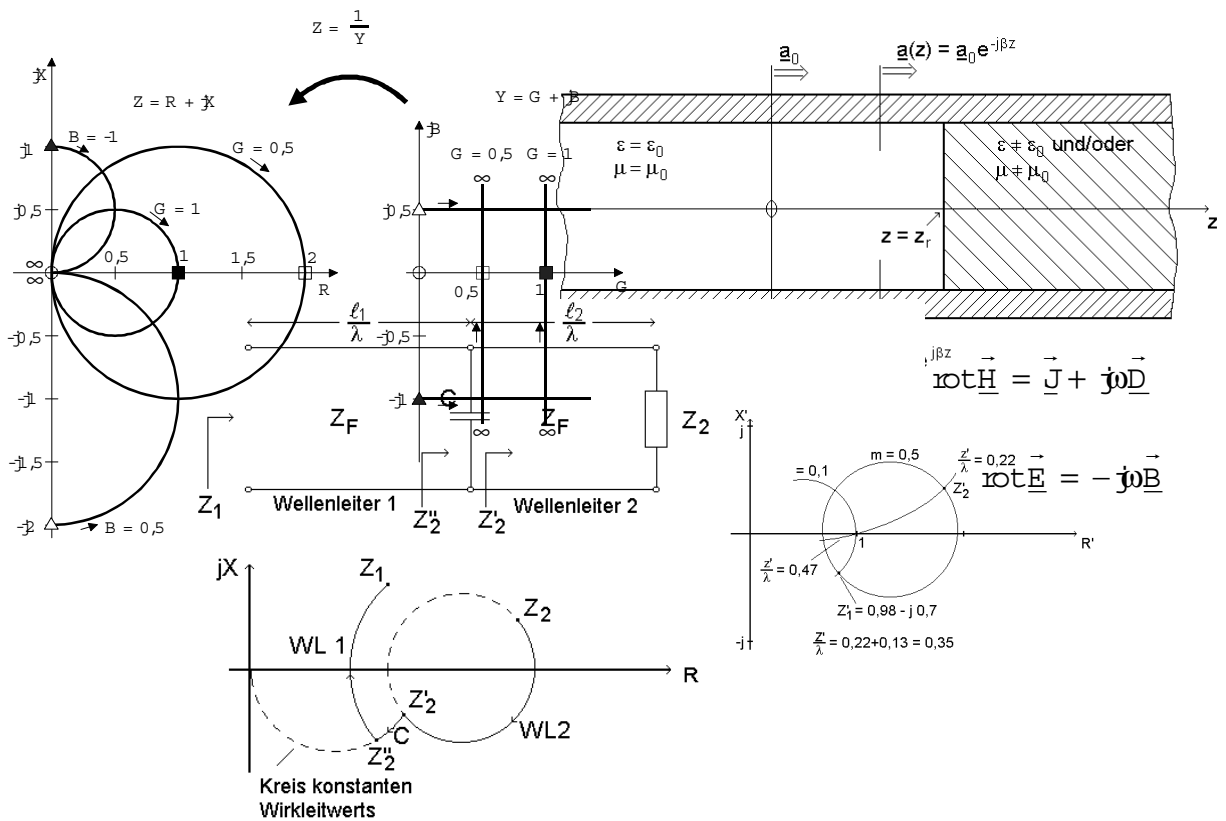


Skript zur Vorlesung

Hochfrequenztechnik I



von

P.W. Baier

Dieses Skript kann von der Homepage des Lehrstuhls für hochfrequente Signalübertragung und -verarbeitung

<http://www.eit.unik-kl.de/baier>

auf der Seite

<http://www.eit.unik-kl.de/baier/Teaching/hfl/script.htm>

heruntergeladen werden.

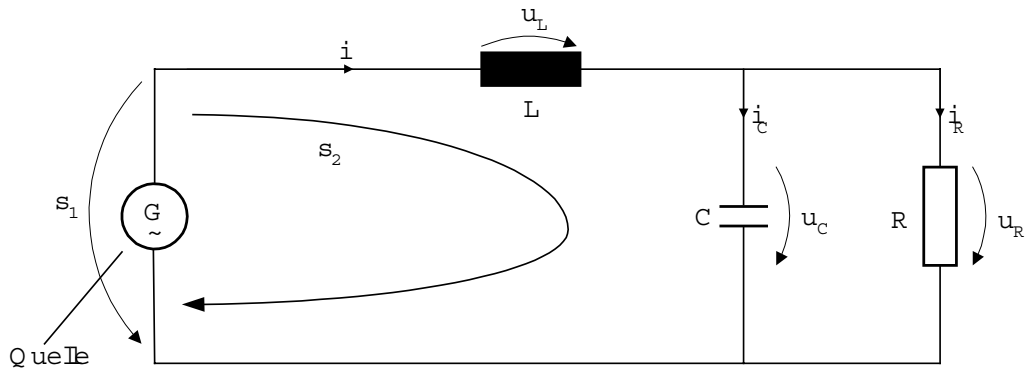
1.	ENFÜHRUNG	1
1.1.	HOCHFREQUENZEFFEKTE	1
1.2.	FREQUENZBEREICHE, ANWENDUNGEN	4
2.	TRANSFORMATION MIT KONZENTRIERTEN ELEMENTEN	5
2.1.	ZWECK DER TRANSFORMATION	5
2.2.	INVERSIONSDIAGRAMM	7
2.3.	TRANSFORMATION DURCH SERIENSCHALTEN	10
2.4.	TRANSFORMATION DURCH PARALLELSCHALTEN	11
2.5.	TRANSFORMATION MIT MEHREREN ELEMENTEN	13
2.6.	SMITH-DIAGRAMM	15
3.	EBENE WELLEN	16
3.1.	ALLGEMEINE QUANTITATIVE BESCHREIBUNG	16
3.1.1.	Orts- und Zeitabhängigkeit	16
3.1.2.	Wellenlänge, Geschwindigkeiten	19
3.1.3.	Komplexe Wellenamplitude	22
3.2.	ELEKTRODYNAMISCHE GRUNDLAGEN	24
3.2.1.	Maxwellsche Feldgleichungen	24
3.2.2.	Feldwellengleichungen	34
3.3.	EBENE HOMOGENE WELLEN IM FREIEN RAUM	41
3.3.1.	Feldstärken	41
3.3.2.	Polarisation	45
3.4.	TEM-WELLEN AUF ZWEILEITERSYSTEMEN	48
3.4.1.	Feldstärken	48
3.4.2.	Spannung, Strom, Leistungsbeleg, Wellenwiderstand	56
3.5.	HOHLEITERWELLEN	61
3.5.1.	Hohleiter	61
3.5.2.	H-Wellentypen (TE-Wellentypen)	62
3.5.3.	E-Wellentypen (TM-Wellentypen)	71
4.	FEHLANGEPAßTE WELLENLEITER	72
4.1.	REFLEXION	72
4.1.1.	Hinlaufende und reflektierte Welle	72
4.1.2.	Reflexionsfaktor, Anpassungsfaktor, Welligkeitsfaktor	74
4.1.3.	Resultierende komplexe Wellenamplitude	77
4.2.	IMPEDANZTRANSFORMATION	81
4.2.1.	Feldwellenwiderstand, Wellenwiderstand	81
4.2.2.	Repräsentative Feldgrößen	82
4.2.3.	Resultierende Impedanz	83
4.2.4.	Kreisdiagramm bei reellem Reflexionsfaktor $r_0 = -r_0$	84
4.2.5.	Kreisdiagramm bei komplexem Reflexionsfaktor r_0	89
4.2.6.	Kreise konstanter Wirkleistung	91
4.2.7.	Beispiele von Transformationsschaltungen	93
5.	WELLENMÄßIGE BESCHREIBUNG VON N-TOREN MIT DER STREUMATRIX	96
5.1.	N-TOR, STREUMATRIX, SIGNALFLUßDIAGRAMM	96
5.2.	ENTORQUELLE	103
5.3.	SPEZIELLE MEHRTORE	106
	Anhang A: Literatur	108

1. Einführung

2001-12-21

1.1. Hochfrequenzeffekte

Gleichvorgänge und langsame Vorgänge:



- Elemente (nahezu) ideal realisierbar, d.h.

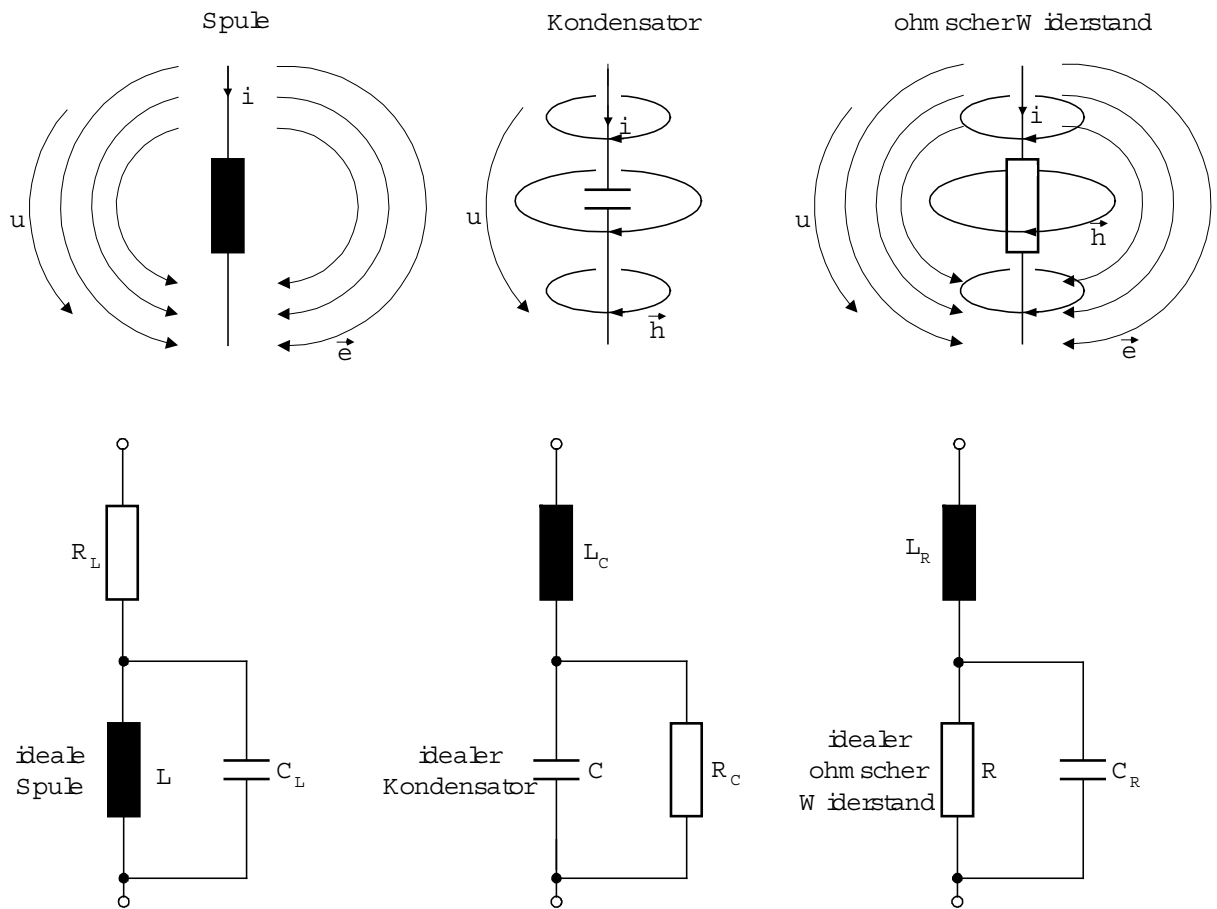
$$u_L = L \cdot \frac{\partial i_L}{\partial t}, \quad i_C = C \cdot \frac{\partial u_C}{\partial t}, \quad u_R = i_R \cdot R.$$

- keine Laufzeiteffekte, d.h.

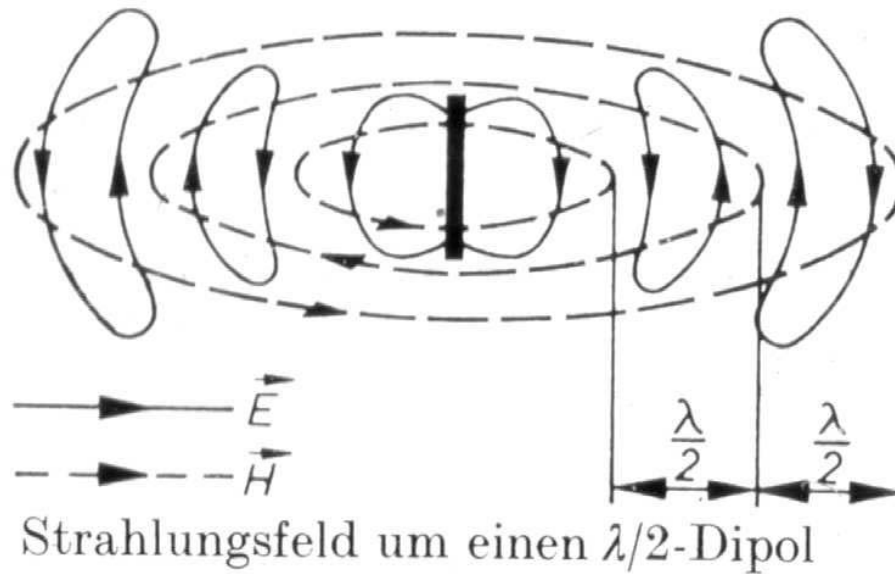
$$\int_{s_1} \vec{e} \, d\vec{s} = \int_{s_2} \vec{e} \, d\vec{s} = u, \quad \vec{e} = \text{elektr. Feldstärke}$$

- keine Abstrahlung.

-parasitäre Effekte:



Die parasitären Effekte steigen mit wachsender Frequenz. Bei den ohmschen Bauteilen nehmen die Verluste mit wachsender Frequenz zu.



- Es entstehen geschlossene elektrische Feldlinien.

- Die von der Quelle bewirkten Feldänderungen breiten sich mit endlicher Geschwindigkeit aus (Lichtgeschwindigkeit).

- In der Konfiguration nach Seite 1 ist deshalb

$$\int_{S_1} \vec{e} \, d\vec{s} \neq \int_{S_2} \vec{e} \, d\vec{s} .$$

Wenn die Abmessungen der betrachteten Gebilde in die Größenordnung der Wellenlänge λ kommen, so müssen zur Beschreibung anstelle von Strömen und Spannungen Felder und Wellen verwendet werden.

- Abstrahlung: Wie oben dargestellt, gehen auch von einer lokal begrenzten Schaltung Wellen aus; es wird elektromagnetische Energie abgestrahlt. Dieser Effekt ist um so ausgeprägter, je „schneller“ die Vorgänge sind.

1.2. Frequenzbereiche, Anwendungen

2001-12-07

Frequenzbereiche: Die Hochfrequenztechnik befaßt sich mit Vorgängen, bei denen

- parasitäre Effekte,
- Laufzeiteffekte,
- Abstrahlung

nicht vernachlässigbar sind. Ab welcher Frequenz diese Effekte wichtig werden, hängt von den Abmessungen der betrachteten Gebilde ab.

Pauschal: >30 kHz ... 300 MHz „hochfrequent“

englischer Sprachgebrauch: HF (high frequency) entspricht Kurzwelle (3-30 MHz)

Mikrowellentechnik, Höchstfrequenztechnik: >1 GHz bis 100 GHz.

Anwendungsgebiete:

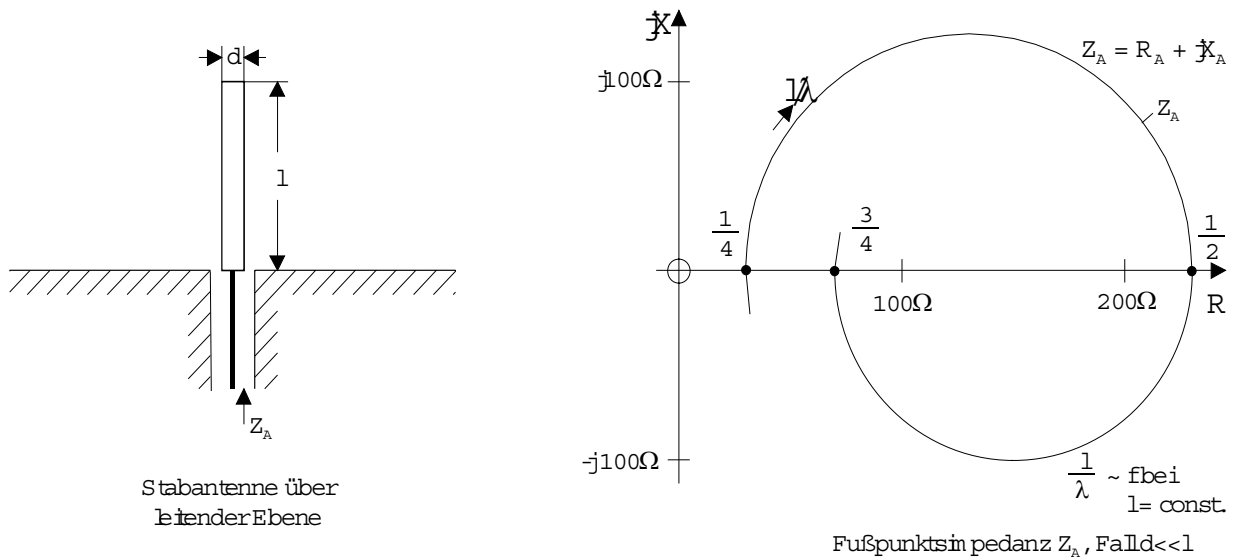
- Nachrichtenübertragung (Rundfunk, Richtfunk, Mobilfunk),
- Funkmeßtechnik (Ortung, Navigation, Kennung),
- Erkundung (Abbildungstechniken),
- Wärmebehandlung (Industrie, Medizin, Haushalt),
- Meßtechnik (z.B. Feuchtegehalt von Materialien, Positionsbestimmung).

2. Transformation mit konzentrierten Elementen

2001-12-07

2.1. Zweck der Transformation

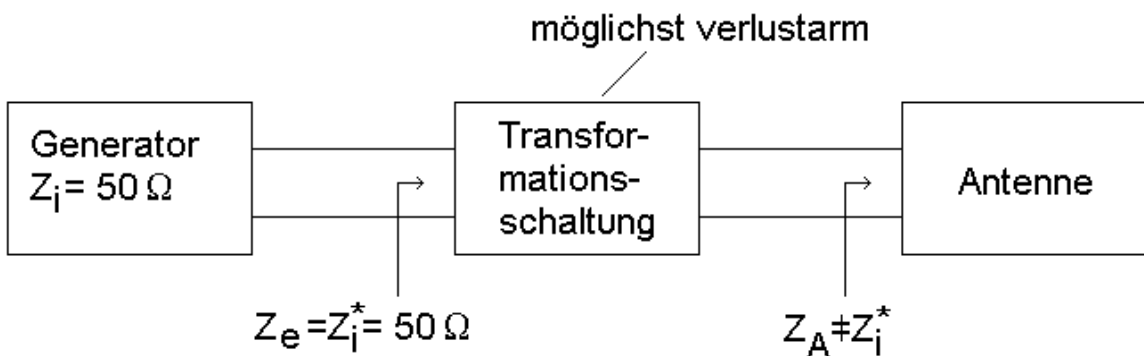
Beispiel:

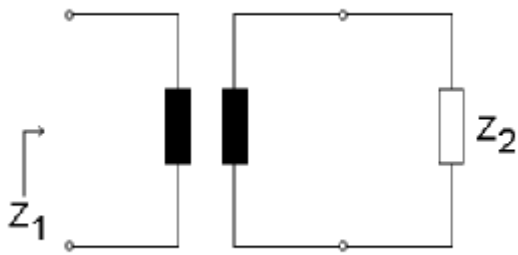


Die Fußpunktimpedanz Z_A der Antenne hängt von der Frequenz ab. Wenn man bei Speisung der Antenne mit einem Generator des Innenwiderstands $Z_i = 50\Omega$ Leistungsanpassung wünscht, so muß zwischen Antenne und Generator eine Transformationschaltung angebracht werden, die die Transformation

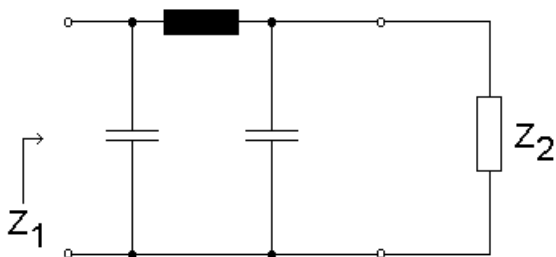
$$Z_A = Z_i^* = 50\Omega$$

möglichst bei allen Frequenzen und möglichst verlustarm bewirkt:

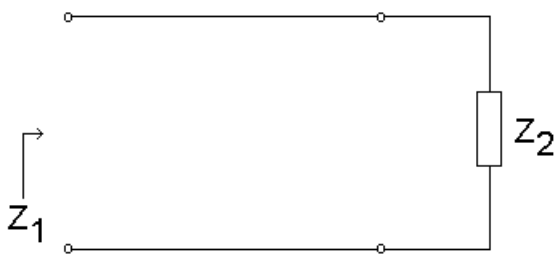




Übertrager (siehe Grundlagenvorlesung)
($< 1 \text{ MHz}$)



Schaltung mit konzentrierten Elementen
($< 1 \text{ GHz}$)



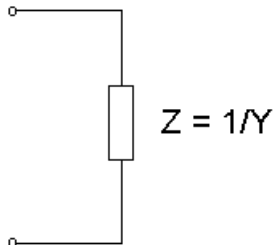
Leitung
($> 50 \text{ MHz}$)

In Abschnitt 2 interessieren Schaltungen mit konzentrierten Elementen.

2.2. Inversionsdiagramm

2001-12-07

Wunsch: Impedanz- und Admittanzbetrachtungen sollen in ein und demselben Diagramm gem acht werden können.

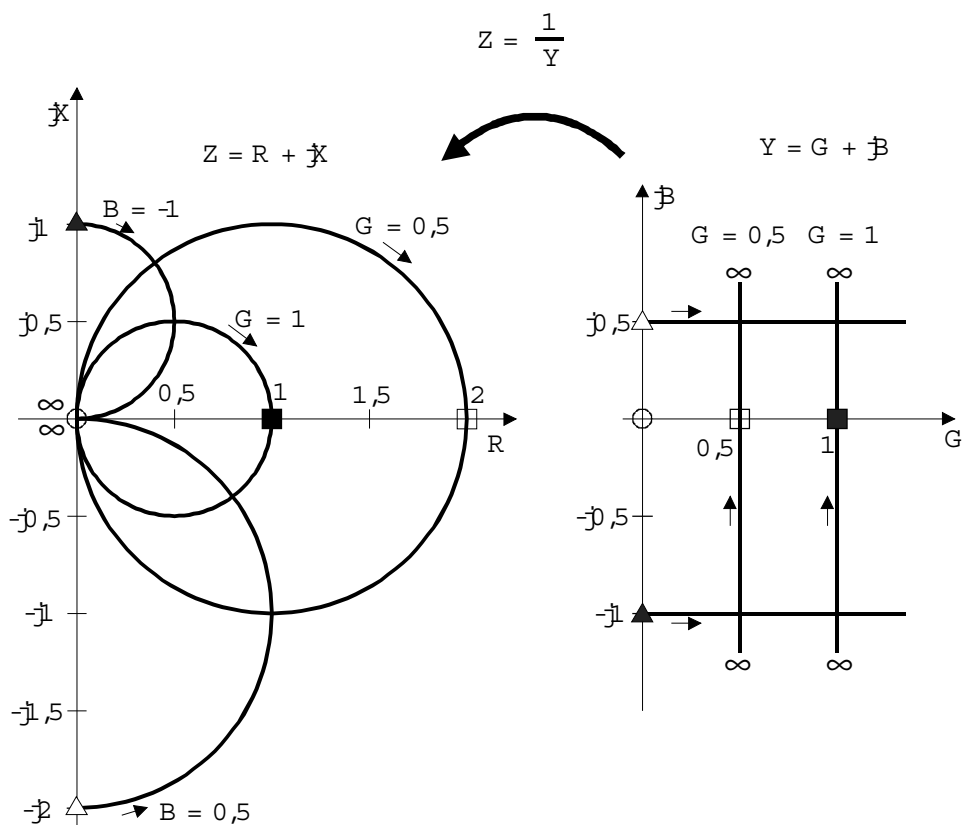


Lösung: Wegen

$$Z = \frac{1}{Y}$$

(2.2.1)

kann die Admittanz- auf die Impedanzebene konform abgebildet werden. Die achsenparallelen Geraden der Admittanzebene werden hierbei auf Kreise in der Z-Ebene abgebildet. Die Zeichnung zeigt beispielhaft die Abbildung einiger achsenparalleler Geraden der Y-Ebene auf Kreise in der Z-Ebene.



Jeder Punkt in der Y -Ebene wird durch (2.2.1) in einen Punkt der Z -Ebene abgebildet, der der Impedanz $Z=1/Y$ entspricht.

Die Kreise $G = \text{const.}$ in der Z -Ebene sind Kreise konstanten Wirkwerts.

Die Kreise $B = \text{const.}$ in der Z -Ebene sind Kreise konstanten Blindwerts.

Alle Impedanzen auf einem Kreis $G = \text{const.}$ ergeben Leitwerte $Y=1/Z$ mit gleichem Realteil G .

Alle Impedanzen auf einem Kreis $B = \text{const.}$ ergeben Leitwerte $Y=1/Z$ mit gleichem Imaginärteil B .

Wenn man das Kreissystem in der Z -Ebene hinreichend dicht wählt, so kann man zu jedem Z das $Y=1/Z$ unmittelbar ablesen. Ein Diagramm mit solchen dichtliegenden Kreisen ist das Inversionsdiagramm (wird in der Vorlesung ausgeteilt).

Übungsaufgabe: Kreise mit $G = \text{const.}$ und Kreise mit $B = \text{const.}$ berechnen (Mittelpunkt, Radius)!

Anwendungsbeispiel:

2001-12-07

$$1) \quad Z = (60 + j80) \Omega \rightarrow Z' = Z / \underbrace{100 \Omega}_{R_N} = 0,6 + j0,8$$

$$\text{Aus Diagramm: } Y' = 0,6 - j0,8 \rightarrow Y = Y' / 100 \Omega = \underline{(6 - j8) \text{ mS}}$$

$$2) \quad Y = (150 + j50) \text{ mS} \rightarrow Y' = Y \cdot 10 \Omega = 1,5 + j0,5$$

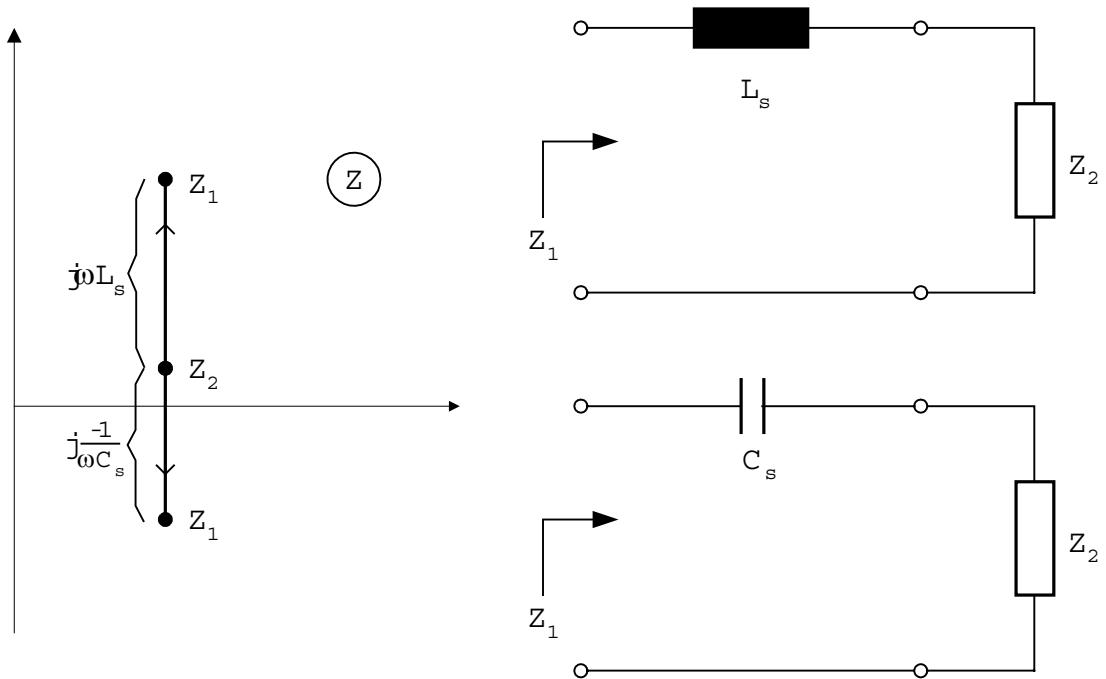
$$\text{Aus Diagramm: } Z' = 0,6 - j0,2 \rightarrow Z = Z' \cdot 10 \Omega = \underline{(6 - j2) \Omega}$$

Anmerkung: Man kann auch das kartesische System als Y-System und das Kreissystem als Z-System verwenden.

2.3. Transformation durch Serienschalten

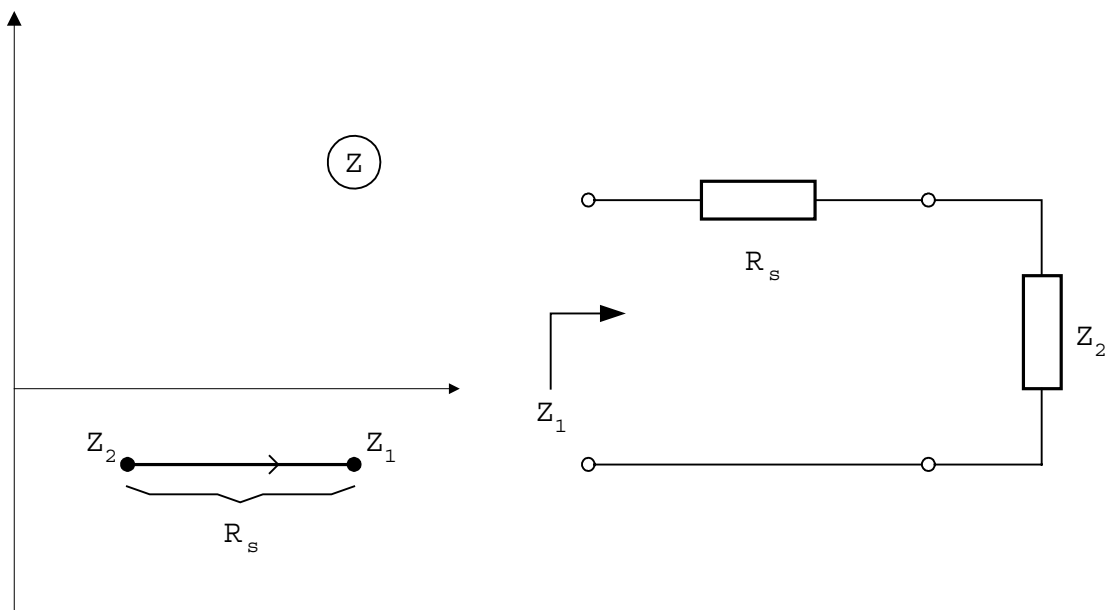
2001-12-07

Blindelement in Serie:



- verlustfreie Transformation,
- nur Z -Werte ober- bzw. unterhalb von Z_2 erreichbar.

Wirklement in Serie:

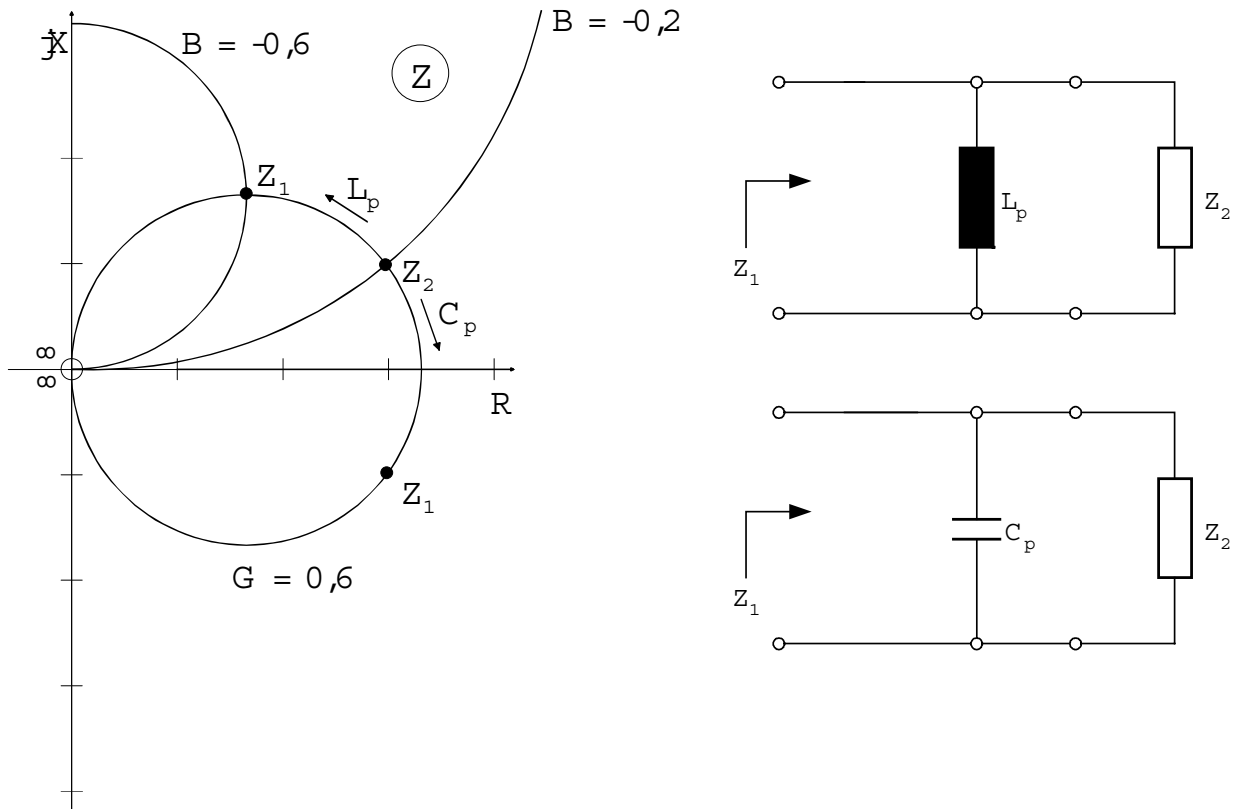


- verlustbehaftete Transformation,
- nur Z -Werte rechts von Z_2 erreichbar.

2.4. Transformation durch Parallelschalten

2001-12-07

Blindlempentparallel:



Beispiel: $Z_2 = 1,5 + j0,5,$

$$Y_2 = 0,6 - j0,2,$$

$$Y_1 = 0,6 - j0,2 - j0,4 = 0,6 - j0,6$$

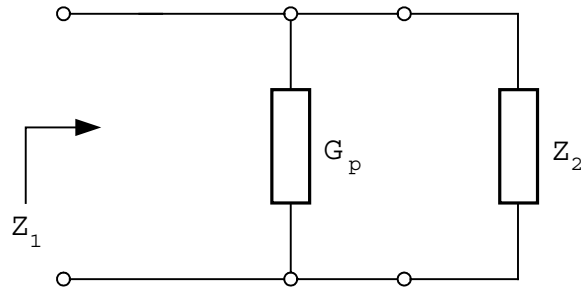
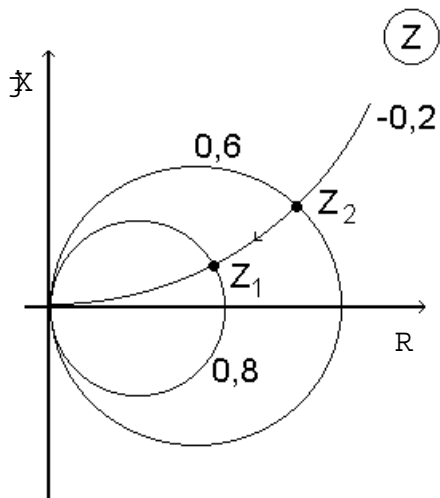
$$Z_1 = 0,83 + j0,83$$

$$\omega L_p = 2,5$$

$$B_p = \frac{1}{\omega L_p} = -0,4$$

siehe obiges
Beispiel

- verlustfreie Transformation,
- nur Z -Werte auf dem Kreis konstanten Wirkleistungswerts durch Z_2 erreichbar.



<p><u>Beispiel:</u> $Z_2 = 1,5 + j0,5,$ $Y_2 = 0,6 - j0,2$ $Y_1 = 0,6 - j0,2 + 0,2 = 0,8 - j0,2$ $Z_1 = 1,18 - j0,2$</p>	$G_p = 0,2$	$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{siehe obiges} \\ \text{Beispiel} \end{array}$
---	-------------	---

- verlustbehaftete Transformation,
- nur Z-Werte auf dem Kreis konstanten Blindleistungswerts durch Z_2 innerhalb des Kreises $G = \text{const.}$ durch Z_2 erreichbar.

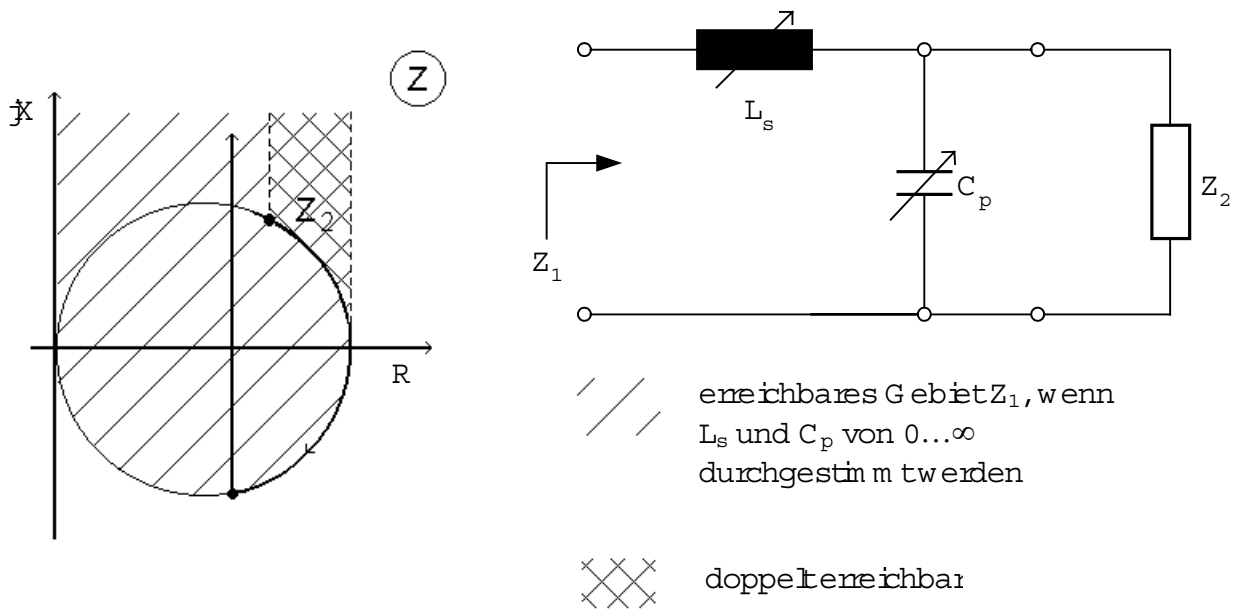
2.5. Transformation mit mehreren Elementen

2001-12-07

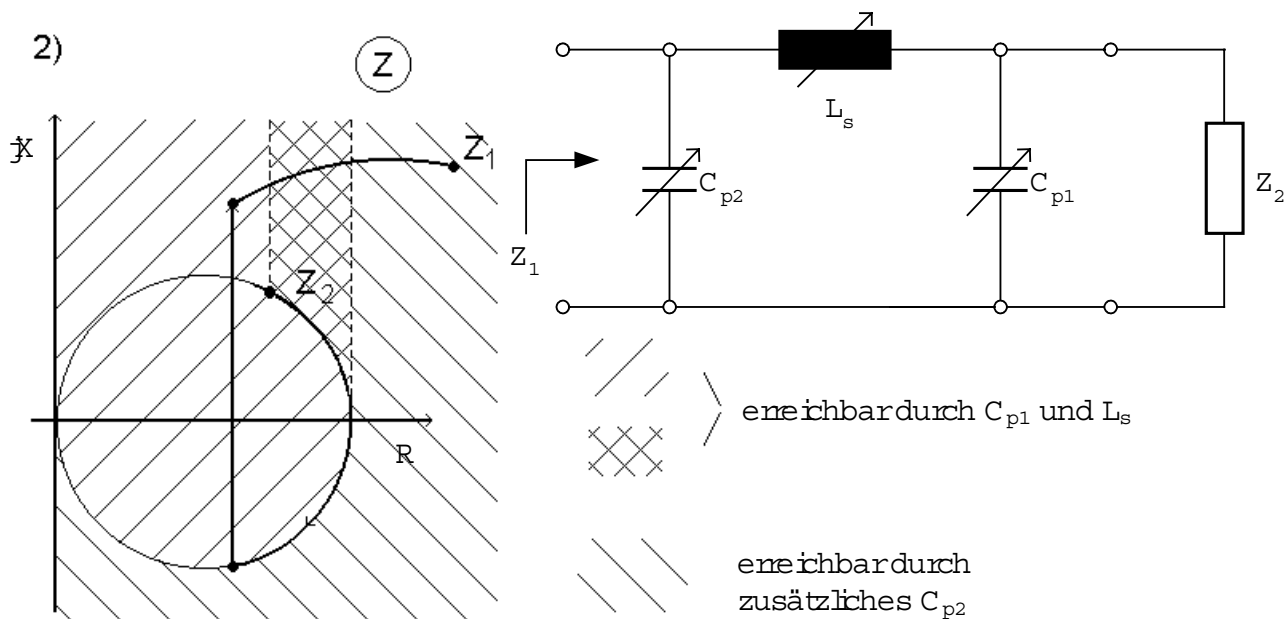
Durch ein einziges zusätzliches Element in Serie oder parallel können ausgehend von Z_2 nur Werte Z_1 auf Geraden oder Kreisbögen durch Z_2 erreicht werden.

Wenn mehr als ein einziges zusätzliches Element verwendet wird, so können ausgehend von Z_2 flächige Bereiche erreicht werden.

Beispiel:



Feststellung: Mit zwei zusätzlichen Blindelementen ist ausgehend von Z_2 nicht die gesamte rechte Halbebene erreichbar.



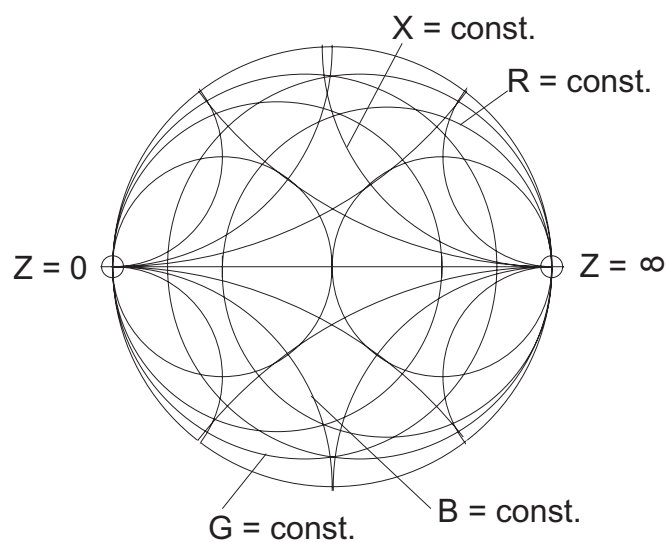
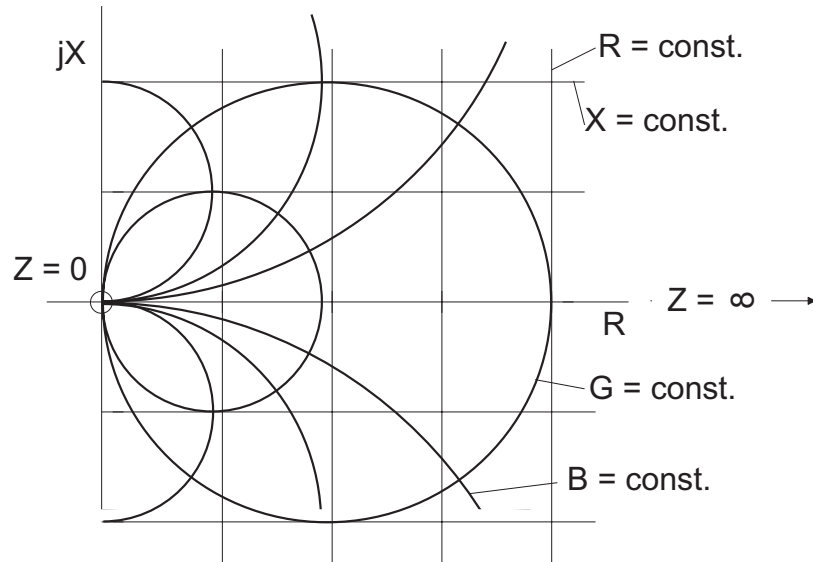
Anmerkung: Obiges Z_1 kann durch unendlich viele Kombinationen C_{p1} , L_s , C_{p2} erreicht werden.

Feststellung: Mit drei zusätzlichen Blindelementen ist ausgehend von Z_2 die gesamte rechte Halbebene erreichbar, wenn die Art der Blindelemente (L, C) und die Schaltungsstruktur geeignet gewählt werden.

Übungsaufgabe:

- Phasendrehung durch zusätzliche Serien- und/oder Parallelemente,
- Prinzip der konstanten Wirkleistung.

Wenn sich bei einer Transformationsaufgabe die auftretenden Impedanzen um mehr als eine Größenordnung voneinander unterscheiden, wird die Darstellung des Transformationswegs im Inversionsdiagramm sehr ungenau. Größere Genauigkeit beiderartigen Transformationsaufgaben erhält man, wenn man das Inversionsdiagramm (rechte Halbebene) auf das Innere eines Kreises konform abbildet.



Anmerkung: Das Kreissystem $G = \text{const.}, B = \text{const.}$ entsteht aus dem Kreissystem $R = \text{const.}, X = \text{const.}$ durch Drehung um 180° .

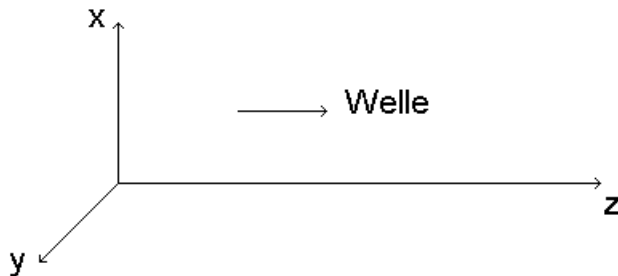
Beispiel: $Z = 1 + j1 \rightarrow Y = 0,5 - j0,5,$
 $Z = 0,6 + j3,8 \rightarrow Y = 0,04 - j0,26.$

3.1. Allgemeine quantitative Beschreibung

3.1.1. Orts- und Zeitabhängigkeit

Eine Welle (akustisch, elektromagnetisch) ist dadurch charakterisiert, daß physikalische Größen in charakteristischer Weise von Ort und Zeit abhängen.

Es wird ein rechtshändiges kartesisches Koordinatensystem vorausgesetzt, in dem eine ebene Welle parallel zur z-Achse in Richtung wachsender z wandert. Die Frequenz sei f.



Es werde eine physikalische Größe an dieser Welle betrachtet, z.B. die elektrische Feldstärke e_y , wenn die Welle elektromagnetisch ist. Dann gilt für diese Größe mit $\beta > 0$

$$e_y(x,y,z,t) = a(x,y,z,t) = A_0(x,y) \cdot \underbrace{\cos(2\pi ft + \psi - \beta z)}_{\text{Phase}} \quad (3.1.1.1)$$

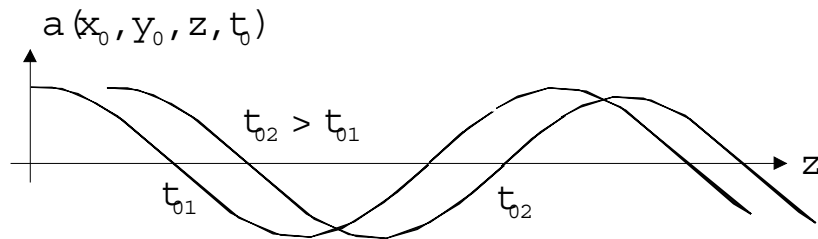
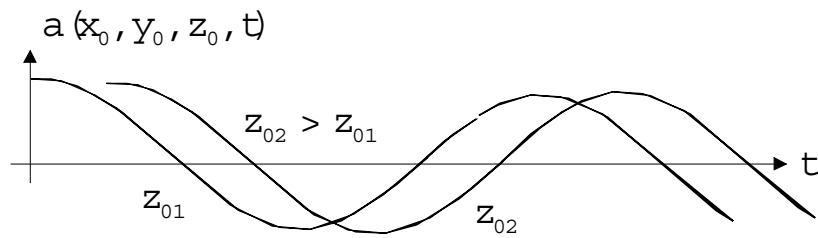
Anmerkung: Ein noch allgemeinerer Ansatz wäre

$$a(x,y,z,t) = A_0(x,y) \cdot \cos(2\pi ft + \psi(x,y) - \beta z).$$

Im folgenden sei aber $\psi(x,y) = \text{const.}$

Typisch:

- nur von den Ortskoordinaten x, y abhängige Funktion $A_0(x, y)$,
- hamonische Abhängigkeit von t und z.



Als Phasenfront bezeichnet man den geometrischen Ort, an dem die in (3.1.1.1) definierte Phase für gegebenes t überall denselben Wert hat. Die Wellen nach (3.1.1.1) heißen eben, weil die Phasenfronten Ebenen sind, in vorliegendem Beispiel Ebenen $z = \text{const}$.

Anmerkung: In $\cos(2\pi ft + \psi - \beta z)$ müßten gleichzeitig t und z größer werden, damit a gleich bleibt. Deshalb gilt in obiger Zeichnung $z_{02} > z_{01}$ und $t_{02} > t_{01}$.

Komplexe Darstellung: Mit der komplexen Amplitude für $z=0$

$$\underline{A}_0(x, y) = A_0(x, y) \cdot e^{j\psi} \quad (3.1.1.2)$$

kann anstelle von (3.1.1.1) geschrieben werden

$$a(x, y, z, t) = \text{Re} \left[\underline{A}_0(x, y) \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{j\omega t} \right]. \quad (3.1.1.3)$$

Homogene Wellen: Wenn die Wellen homogen ist, hängt $\underline{A}_0(x, y)$ nicht von x und y ab, d.h.

$$\underline{A}_0(x, y) = \underline{A}_0 = \text{const.} \quad (3.1.1.4)$$

Gedämpfte Wellen: Wenn die Wellen Verluste erfährt, gilt anstelle von (3.1.1.3)

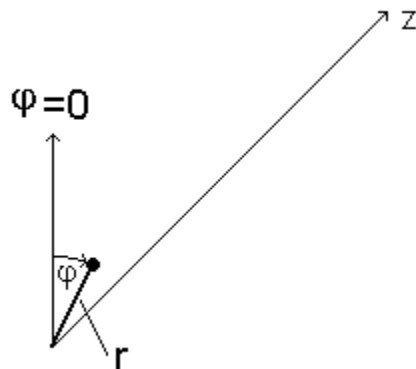
$$a(x,y,z,t) = \operatorname{Re} \left[\underline{A}_0(x,y) \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j\omega t} \right]. \quad (3.1.1.5)$$

Wellennuß: Die Größe

$$\gamma = \underbrace{\alpha}_{\text{Dämpfungsmaß}} + j \cdot \underbrace{\beta}_{\text{Phasenmaß}} \quad (3.1.1.6)$$

heißt Wellennuß. Falls γ als konstant zu betrachten ist, verwendet man auch die Bezeichnungen Ausbreitungskonstante, Dämpfungskonstante, Phasenkonstante.

Zylinderkoordinaten: Anstelle von kartesischen Koordinaten kann man auch Zylinderkoordinaten verwenden:



Dann erhält man anstelle von (3.1.1.5)

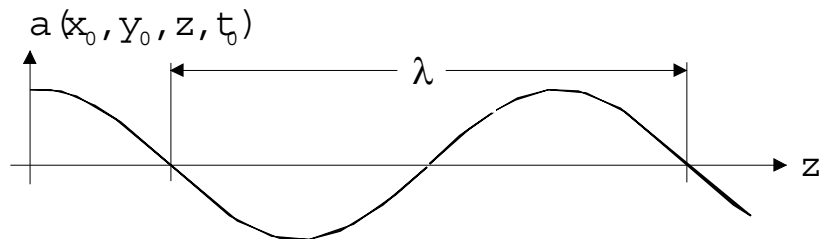
$$a(r,\varphi,z,t) = \operatorname{Re} \left[\underline{A}_0(r,\varphi) \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{-\alpha z} \cdot e^{j\omega t} \right]. \quad (3.1.1.7)$$

3.1.2. Wellenlänge, Geschwindigkeiten

2001-12-07

Es wird der verlustfreie Fall betrachtet, d.h. $\gamma = \beta$.

Wellenlänge:

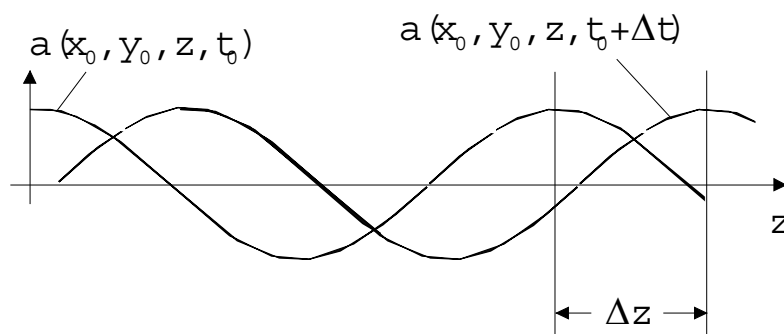


Der Abstand zwischen zwei benachbarten, gleichartigen Zuständen (Maximum, Minimum) heißt Wellenlänge.

Wenn man in der Exponentialfunktion in (3.1.1.3) z um λ vergrößert, so verkleinert sich der Exponent um 2π , somit $\beta(z + \lambda) = \beta z + 2\pi$, d.h.

$$\lambda = \frac{2\pi}{\beta}. \quad (3.1.2.1)$$

Phasengeschwindigkeit:



Im Zeitintervall Δt ist die Welle um Δz gewandert.

$$v_p = \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad (3.1.2.2)$$

heißt Phasengeschwindigkeit. Wenn man mit Phasengeschwindigkeit in der Wellen wandert, so muß der Wert der Exponentialfunktion in (3.1.1.3) konstant bleiben, d.h.

$$e^{-\beta z + j\omega t} = e^{-\beta(z+\Delta z) + j\omega(t+\Delta t)}.$$

Hieraus folgt

$$-\beta \cdot \Delta z + \omega \cdot \Delta t = 0,$$

somit aus (3.1.2.2)

$$v_p = \frac{\Delta z}{\Delta t} = \frac{\omega}{\beta}. \quad (3.1.2.3)$$

Aus (3.1.2.1) und (3.1.2.2) folgt

$$v_p \cdot \underbrace{\frac{2\pi}{\omega}}_{\text{Periodendauer } T} = \frac{v_p}{f} = \frac{\omega}{\beta} \cdot \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\beta} = \lambda. \quad (3.1.2.4)$$

Gruppengeschwindigkeit (Energieschwindigkeit): Die Gruppengeschwindigkeit ist

$$v_g = \frac{d\omega}{d\beta} = \frac{1}{d\beta/d\omega} \quad (\text{Geschwindigkeit der Modulation}). \quad (3.1.2.5)$$

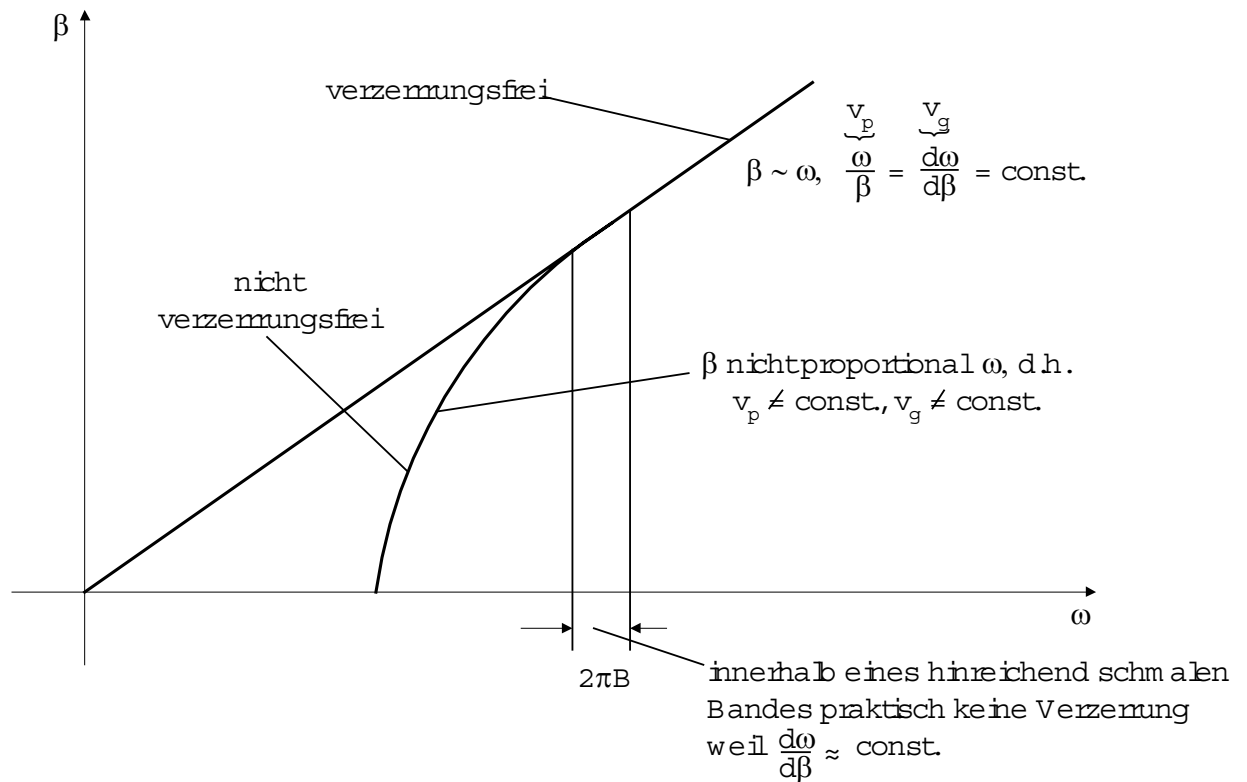
Dispersionsfreiheit (keine Laufzeitdispersion): Wenn innerhalb eines Nachrichtenbandes

$$\frac{dv_g}{d\omega} \equiv 0, \text{ d.h. } \frac{d\beta}{d\omega} = \text{const.}$$

gilt, so treten keine Verzerrungen der Modulation auf. Ist

$$\frac{d\beta}{d\omega} \neq \frac{\beta}{\omega},$$

so wird jedoch die Trägerphase verschoben.



3.1.3. Komplexe Wellenamplitude

2002-01-16

Die komplexe Amplitude $\underline{A}_0(x,y)$ der Welle W kann man in der Form

$$\underline{A}_0(x,y) = \underline{a}_0 \cdot \tilde{A}_0(x,y) \quad (3.1.3.1)$$

darstellen. Hierbei ist

- $\tilde{A}_0(x,y)$: komplexe Amplitude einer Bezugswelle \tilde{W} . \tilde{W} gibt die prinzipielle Feldstruktur an.
- \underline{a}_0 : komplexe Wellenamplitude der Welle W (pauschale Beschreibungsgröße für Intensität und Nullphase).

Die komplexen Amplituden $\underline{A}_0(x,y)$ aller Wellen W gleicher Frequenz und prinzipiell gleicher Feldstruktur ergeben sich aus $\tilde{A}_0(x,y)$, indem man mit einer geeigneten komplexen Wellenamplitude \underline{a}_0 multipliziert.

Die Bezugswelle \tilde{W} kann so gewählt werden, daß sich die von der Welle W transportierte Wirkleistung zu

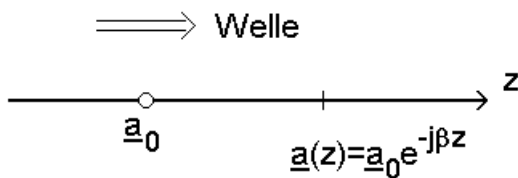
$$P_W = \frac{|\underline{a}_0|^2}{2} = \frac{a_0^2}{2} \quad (3.1.3.2)$$

ergibt. \underline{a}_0 hat dann die Einheit \sqrt{W} .

Beispiel: $\underline{A}_0(x,y)$ beschreibt eine elektrische Feldstärke und hat die Einheit V/m . Dann hat $\tilde{\underline{A}}_0(x,y)$ die Einheit $\frac{V/m}{\sqrt{W}}$.

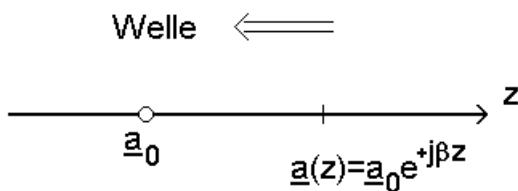
Wenn die Welle in Richtung wachsender z wandert, so ergibt sich die komplexe Wellenamplitude an der Stelle z aus \underline{a}_0 zu

$$\underline{a}(z) = \underline{a}_0 \cdot e^{-j\beta z} . \quad (3.1.3.3)$$



Wenn die Welle in Richtung abnehmender z läuft, so ergibt sich die komplexe Wellenamplitude an der Stelle z aus \underline{a}_0 zu

$$\underline{a}(z) = \underline{a}_0 \cdot e^{j\beta z} . \quad (3.1.3.4)$$



3.2. Elektrodynamische Grundlagen

2001-12-07

3.2.1. Maxwell'sche Feldgleichungen

Vektorielle komplexe Amplituden: Die betrachteten Feldgrößen seien zeitharmonisch.

Beispielelektrische Feldstärke:

$$\vec{e} = \operatorname{Re}(\vec{E} \cdot e^{j\omega t}) \quad (3.2.1.1)$$

Achtung :

\vec{e} : Vektorielles Momentanwert, z.B. $\vec{e} = \vec{u}_x \cdot e_x + \vec{u}_y \cdot e_y + \vec{u}_z \cdot e_z$

\vec{E} : Vektorielle komplexe Amplitude, z.B. $\vec{E} = \vec{u}_x \cdot E_x + \vec{u}_y \cdot E_y + \vec{u}_z \cdot E_z$

Größen:

\vec{E} :	elektrische Feldstärke	V/m
\vec{H} :	magnetische Feldstärke	A/m
\vec{D} :	elektrische Flußdichte	C/m ²
\vec{B} :	magnetische Induktion	T
\vec{J} :	Stromdichte	A/m ²
ρ :	Ladungsdichte, <u>sein Null</u>	C/m ³
$\epsilon_0 \epsilon_r$:	Permittivität	F/m
$\mu_0 \mu_r$:	Permeabilität	H/m
κ :	Leitfähigkeit	S/m

Feldgleichungen:

2001-11-27

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \dot{\vec{D}}, \quad (1. \text{ Feldgleichung, Durchflutungsgesetz}) \quad (3.2.1.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\dot{\vec{B}}. \quad (2. \text{ Feldgleichung, Induktionsgesetz}) \quad (3.2.1.3)$$

Übungsaufgabe: (3.2.1.2) und (3.2.1.3) in verschiedenen Koordinatensystemen in Komponentendarstellung angeben.

Nebenbedingungen:

$$\operatorname{div} \vec{b} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (3.2.1.4)$$

$$\operatorname{div} \vec{d} = \rho \xrightarrow{\rho \equiv 0} \operatorname{div} \vec{d} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{D} = 0. \quad (3.2.1.5)$$

Kontinuitätsgleichung:

$$\operatorname{div} \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \xrightarrow{\rho \equiv 0} \operatorname{div} \vec{j} = 0 \rightarrow \operatorname{div} \vec{J} = 0. \quad (3.2.1.6)$$

Materialgleichungen:

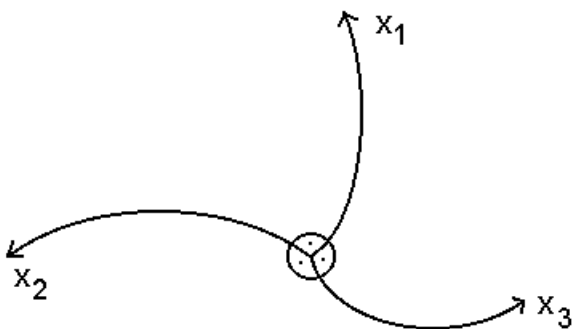
$$\vec{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \cdot \vec{E}, \quad (3.2.1.7)$$

$$\vec{B} = \mu_0 \mu_r \cdot \vec{H}. \quad (3.2.1.8)$$

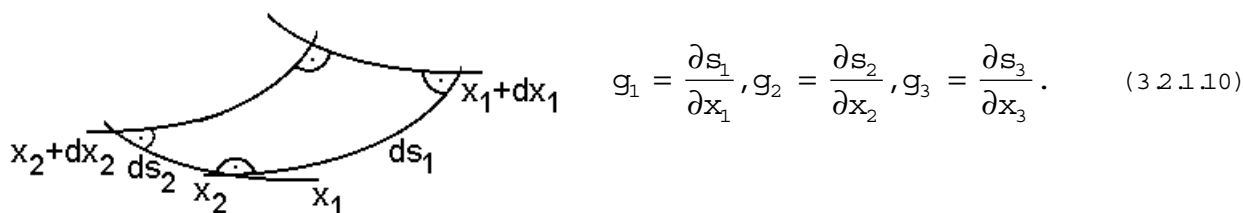
Ohmsches Gesetz:

$$\vec{J} = \kappa \cdot \vec{E}. \quad (3.2.1.9)$$

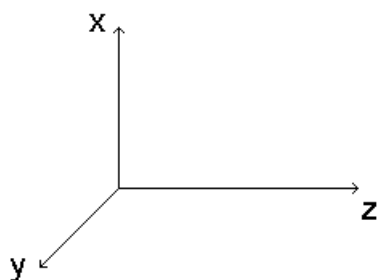
Koordinatensystem e: Es werden beliebige orthogonale, rechtshändige Koordinatensystem e m it den Koordinaten x_1, x_2, x_3 zugelassen. Insbesondere sind auch krum m linige Koordinatensystem e, wie z.B. Zylinder- und Kugelkoordinatensystem e, zugelassen.



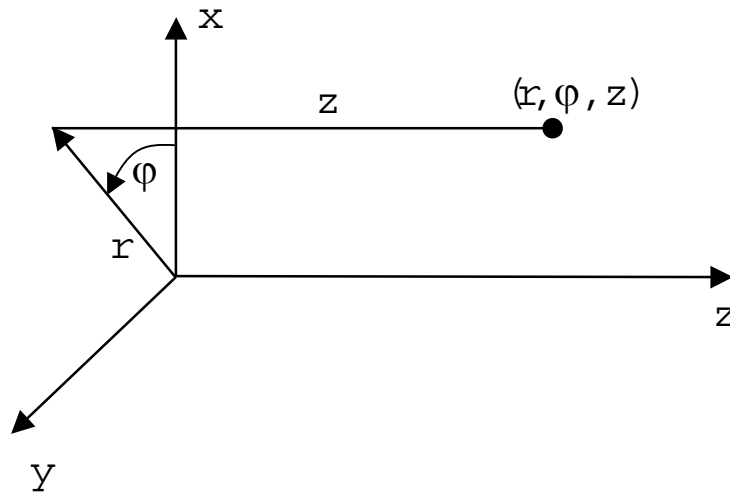
Zum Durchführen von Vektoroperationen wie rot, div, usw. in einem solchen Koordinatensystem m üssen die metrischen Größen g_1, g_2, g_3 eingeführt werden. Diese Größen stellen die Beziehung zwischen differentialen Koordinaten- und Wegdifferenzen her:



Kartesisches Koordinatensystem: Es sei $[x_\mu] = m$ für $\mu = 1, 2, 3$. Dann gilt

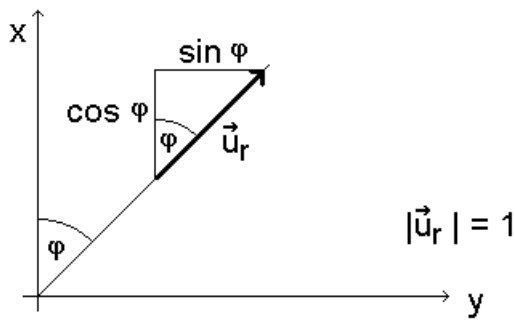


$$\begin{aligned} x_1 &= x, & x_2 &= y, & x_3 &= z, & (3.2.1.11) \\ g_1 &= 1, & g_2 &= 1, & g_3 &= 1. \end{aligned}$$



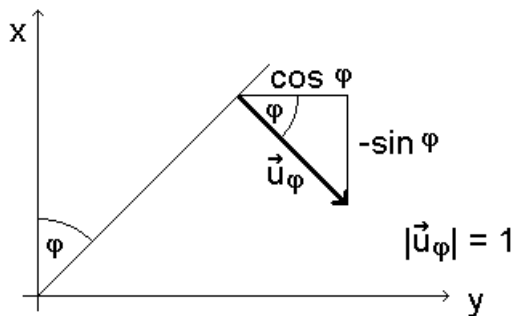
$$\begin{aligned}
 x_1 &= r, & x_2 &= \varphi, & x_3 &= z, \\
 [x_1] &= \text{m}, & [x_2] &= \text{rad}, & [x_3] &= \text{m}, \\
 g_1 &= 1, & g_2 &= r, & g_3 &= 1, \\
 [g_1] &= 1, & [g_2] &= \frac{\text{m}}{\text{rad}}, & [g_3] &= 1.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1.12}$$

Einschub: Einheitsvektoren des Zylinderkoordinatensystems ausgedrückt in kartesischen Bezugskoordinaten (x,y,z) .

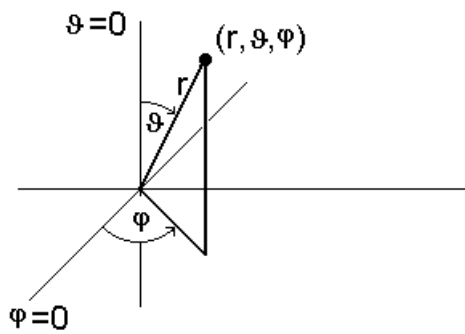


$$\vec{u}_r = \begin{pmatrix} u_{rx} \\ u_{ry} \\ u_{rz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.1.13}$$

$$\vec{u}_\varphi = \begin{pmatrix} u_{\varphi x} \\ u_{\varphi y} \\ u_{\varphi z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \varphi \\ \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.2.1.14}$$



$$\vec{u}_z = \begin{pmatrix} u_{zx} \\ u_{zy} \\ u_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3.2.1.15}$$



$$\begin{aligned}
 x_1 &= r, & x_2 &= \vartheta, & x_3 &= \varphi, \\
 [x_1] &= \text{m}, & [x_2] &= \text{rad}, & [x_3] &= \text{rad}, \\
 g_1 &= 1, & g_2 &= r, & g_3 &= r \sin \vartheta, \\
 [g_1] &= 1, & [g_2] &= \frac{\text{m}}{\text{rad}}, & [g_3] &= \frac{\text{m}}{\text{rad}}.
 \end{aligned}
 \tag{3.2.1.16}$$

Komponentendarstellung von (3.2.1.2) und (3.2.1.3): Mit den metrischen Größen g_1, g_2, g_3 folgt aus (3.2.1.2) in Koordinatensystem x_1, x_2, x_3

$$\text{rot}_{x_1} \vec{H} = \frac{1}{g_2 g_3} \left\{ \frac{\partial (g_3 \cdot \underline{H}_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial (g_2 \cdot \underline{H}_{x_2})}{\partial x_3} \right\} = \underline{J}_{x_1} + \underline{j\omega D}_{x_1},
 \tag{3.2.1.17}$$

$$\text{rot}_{x_2} \vec{H} = \frac{1}{g_3 g_1} \left\{ \frac{\partial (g_1 \cdot \underline{H}_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial (g_3 \cdot \underline{H}_{x_3})}{\partial x_1} \right\} = \underline{J}_{x_2} + \underline{j\omega D}_{x_2},
 \tag{3.2.1.18}$$

$$\text{rot}_{x_3} \vec{H} = \frac{1}{g_1 g_2} \left\{ \frac{\partial (g_2 \cdot \underline{H}_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial (g_1 \cdot \underline{H}_{x_1})}{\partial x_2} \right\} = \underline{J}_{x_3} + \underline{j\omega D}_{x_3}.
 \tag{3.2.1.19}$$

Entsprechend folgt aus (3.2.1.3)

2003-11-26

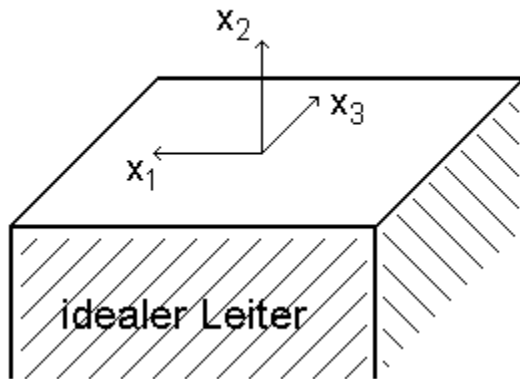
$$\operatorname{rot}_{x_1} \vec{E} = \frac{1}{g_2 g_3} \left\{ \frac{\partial(g_3 \cdot \underline{E}_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial(g_2 \cdot \underline{E}_{x_2})}{\partial x_3} \right\} = -j\omega \underline{B}_{x_1}, \quad (3.2.1.20)$$

$$\operatorname{rot}_{x_2} \vec{E} = \frac{1}{g_3 g_1} \left\{ \frac{\partial(g_1 \cdot \underline{E}_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial(g_3 \cdot \underline{E}_{x_3})}{\partial x_1} \right\} = -j\omega \underline{B}_{x_2}, \quad (3.2.1.21)$$

$$\operatorname{rot}_{x_3} \vec{E} = \frac{1}{g_1 g_2} \left\{ \frac{\partial(g_2 \cdot \underline{E}_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial(g_1 \cdot \underline{E}_{x_1})}{\partial x_2} \right\} = -j\omega \underline{B}_{x_3}. \quad (3.2.1.22)$$

Grenzbedingungen für die elektrischen Feldgrößen:

Leiteroberfläche:



Oberfläche: $x_2 = \text{const.}$ Das Leiterinnere ist feldfrei. An der Oberfläche ist

$$\underline{E}_{x_1} = \underline{E}_{x_3} \equiv 0, \quad (3.2.1.23)$$

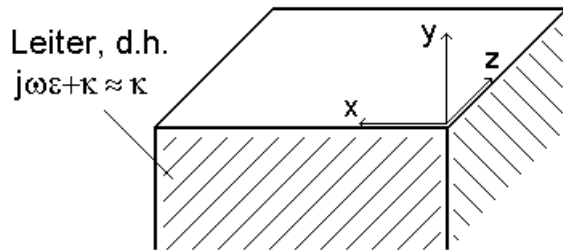
d.h.

$$\underline{E}_t \equiv 0. \quad (3.2.1.24)$$

Genauere Betrachtung für ebene Oberfläche:

2003-11-26

Äußeres Strahlungsfeld, das an der Oberfläche $\underline{H}_x(y=0) = \text{const} \neq 0$,
 $\underline{H}_y(y=0) = \underline{H}_z(y=0) = 0$ erzeugt.



Für das Leiterinnere ergibt die Lösung der Maxwell'schen Gleichungen

$$\underline{H}_x(y) = \underline{H}_x(0) \cdot e^{\sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \cdot (1+j)y}, \quad (3.2.1.25)$$

$$\underline{H}_y = \underline{H}_z = 0,$$

$$\underline{E}_z(y) = -\underline{H}_x(y) \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu}{2\kappa}} \cdot (1+j), \quad (3.2.1.26)$$

$$\underline{E}_x = \underline{E}_y = 0,$$

$$\underline{J}_z(y) = \kappa \cdot \underline{E}_z(y) = -\underline{H}_x(y) \cdot \sqrt{\frac{\omega\mu\kappa}{2}} \cdot (1+j), \quad (3.2.1.27)$$

$$\underline{J}_x = \underline{J}_y = 0.$$

Mit (3.2.1.23) folgt aus (3.2.1.21)

$$-\mu \underline{H}_{x_2} = \frac{1}{g_3 g_1} \left\{ \frac{\partial(g_1 \cdot \underline{E}_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial(g_3 \cdot \underline{E}_{x_3})}{\partial x_1} \right\} \equiv 0 ,$$

d.h.

$$\underline{H}_{x_2} = \underline{H}_n \equiv 0 . \quad (3.2.1.28)$$

Mit (3.2.1.23) folgt aus (3.2.1.17)

$$\frac{1}{g_2 g_3} \left\{ \frac{\partial(g_3 \cdot \underline{H}_{x_3})}{\partial x_2} - \underbrace{\frac{\partial(g_2 \cdot \underline{H}_{x_2})}{\partial x_3}}_{=0} \right\} = \frac{1}{g_2 g_3} \cdot \frac{\partial(g_3 \cdot \underline{H}_{x_3})}{\partial x_2} \equiv 0 . \quad (3.2.1.29)$$

Somit gilt

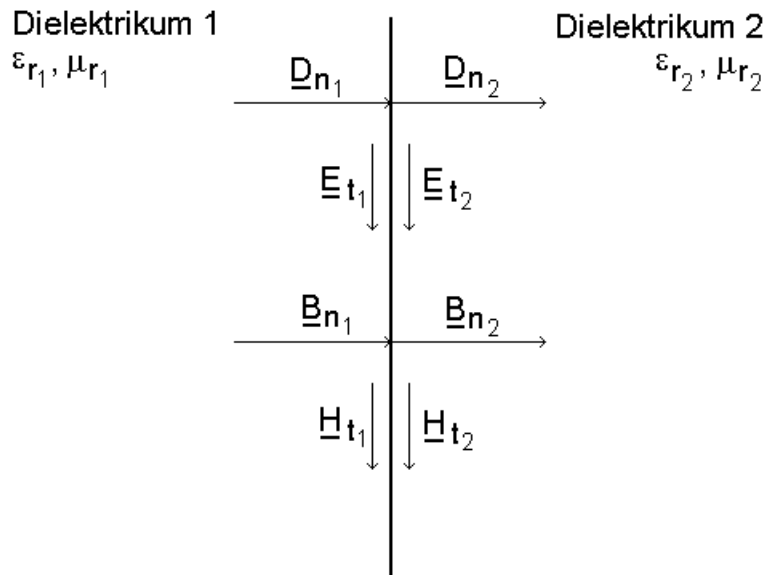
$$\frac{\partial(g_3 \cdot \underline{H}_{x_3})}{\partial x_2} \equiv 0 . \quad (3.2.1.30)$$

Entsprechend folgt mit (3.2.1.23) aus (3.2.1.19)

$$\frac{\partial(g_1 \cdot \underline{H}_{x_1})}{\partial x_2} \equiv 0 . \quad (3.2.1.31)$$

An einer ebenen Oberfläche ist somit

$$\frac{\partial \underline{H}_t}{\partial n} \equiv 0 . \quad (3.2.1.32)$$



An der Grenzschicht zweier Dielektrika gilt

$$\underline{D}_{n_1} = \underline{D}_{n_2} , \quad (3.2.1.33)$$

$$\underline{E}_{t_1} = \underline{E}_{t_2} , \quad (3.2.1.34)$$

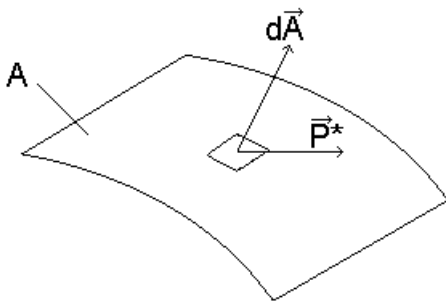
$$\underline{B}_{n_1} = \underline{B}_{n_2} , \quad (3.2.1.35)$$

$$\underline{H}_{t_1} = \underline{H}_{t_2} . \quad (3.2.1.36)$$

Poyntingvektor: In einem elektromagnetischen Wechselfeld wird Energie transportiert. Der Energietransport wird durch den Poyntingvektor (Poynting 1884)

$$\vec{P}^* = \frac{1}{2} \cdot \text{Re} \left[\vec{E} \times \vec{H}^* \right] \quad (3.2.1.37)$$

beschrieben. Seine Einheit ist W/m^2 .



Leistung durch die Fläche A :

$$P = \int_A \vec{P}^* \cdot d\vec{A} \quad (3.2.1.38)$$

3 2 2 . Feldwellengleichungen

2002-01-16

Im folgenden interessieren wir uns für Wellen, die längs verlustfrei wandern. Unter Voraussetzung der Verlustfreiheit entsteht aus (3 2 1 2)

$$\operatorname{rot} \vec{H} = j\omega \varepsilon \vec{E} \quad (3 2 2 1)$$

und aus (3 2 1 3)

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -j\omega \mu \vec{H} . \quad (3 2 2 2)$$

Wenn wir nun auf (3 2 2 1) noch mal rot anwenden, so entsteht mit dem Laplace-Operator Δ unter der Voraussetzung eines homogenen Dielektrikums der Ausdruck

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{H} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} - \Delta \vec{H} = j\omega \varepsilon \cdot \operatorname{rot} \vec{E} . \quad (3 2 2 3)$$

Wegen (3 2 1 4) ist

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{H} = 0 , \quad (3 2 2 4)$$

so daß aus (3 2 2 3)

$$-\Delta \vec{H} = j\omega \varepsilon \cdot \operatorname{rot} \vec{E} \quad (3 2 2 5)$$

entsteht.

Aus (3 2 2 5) erhält man durch Einsetzen von $\operatorname{rot} \vec{E}$ nach (3 2 2 2)

$$-\Delta \vec{H} = j\omega \varepsilon \cdot (-j\omega \mu) \cdot \vec{H} ,$$

und somit

$$\Delta \vec{H} + \omega^2 \varepsilon \mu \vec{H} = 0 . \quad (3 2 2 6)$$

Dies ist eine Wellengleichung, weil örtliche und zeitliche Ableitungen in charakteristischer Kombination auftreten.

In entsprechender Weise erhält man durch zweimaliges Anwenden von rot auf (3.2.2.2) und Einsetzen von (3.2.2.1) die Wellengleichung

$$\Delta \vec{E} + \omega^2 \epsilon \mu \vec{E} = 0. \quad (3.2.2.7)$$

Anmerkung zum Laplace-Operator: Wendet man den Laplace-Operator Δ auf einen Skalar $\Psi(x_1, x_2, x_3)$ an, so gilt

$$\Delta \Psi = \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_3} \right) \right]$$

$$\Delta_{x_1, x_2} \Psi = \frac{1}{g_1 g_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_2} \right) \right].$$

Wendet man den Laplace-Operator Δ auf einen Vektor

$$\vec{A} = \vec{u}_1 A_{x_1} + \vec{u}_2 A_{x_2} + \vec{u}_3 A_{x_3}$$

an, so gilt

$$\Delta \vec{A} = \Delta (\vec{u}_1 A_{x_1}) + \Delta (\vec{u}_2 A_{x_2}) + \Delta (\vec{u}_3 A_{x_3}) =$$

$$\frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \cdot \frac{\partial (\vec{u}_1 A_{x_1})}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial (\vec{u}_1 A_{x_1})}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \cdot \frac{\partial (\vec{u}_1 A_{x_1})}{\partial x_3} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \cdot \frac{\partial (\vec{u}_2 A_{x_2})}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial (\vec{u}_2 A_{x_2})}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \cdot \frac{\partial (\vec{u}_2 A_{x_2})}{\partial x_3} \right) \right] +$$

$$\frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \cdot \frac{\partial (\vec{u}_3 A_{x_3})}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial (\vec{u}_3 A_{x_3})}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \cdot \frac{\partial (\vec{u}_3 A_{x_3})}{\partial x_3} \right) \right].$$

Siehe Bronstein, 25. Auflage, S. 575.

Nabla-Operator ∇ : In kartesischen Koordinaten beschreibt der Nabla-Operator die Operation

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{u}_z.$$

Somit gilt

$$\text{grad } \rho = \nabla \rho,$$

$$\text{div } \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a},$$

$$\text{rot } \vec{a} = \nabla \times \vec{a}.$$

In folgenden werden Wellen betrachtet, die längs der x_3 -Achse

$$x_1 = x_2 = 0 \quad (3.2.2.8)$$

in einem Koordinatensystem wandern. Bei gerader x_3 -Achse ist das Koordinatensystem längs dieser Achse translatorisch, und es gilt unter der Voraussetzung $[\kappa_3] = m$

$$g_3 = g_z = 1. \quad (3.2.2.9)$$

Während \vec{u}_1 und \vec{u}_2 nicht von x_3 und \vec{u}_3 nicht von x_1, x_2 und x_3 abhängen, gilt weiterhin

$$\frac{\partial \vec{u}_1}{\partial x_3} = \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial x_3} \equiv 0, \vec{u}_3 = \vec{u}_z = \text{const.} \quad (3.2.2.10)$$

Schreibt man die Wellengleichung (3.2.2.6) in Komponentenform an, so entsteht

$$\Delta (\underbrace{\vec{u}_1 \underline{H}_{x_1} + \vec{u}_2 \underline{H}_{x_2}}_{\substack{\text{enthält keine} \\ \text{z-Komponente,} \\ \text{weil } \frac{\partial \vec{u}_1}{\partial z} = \frac{\partial \vec{u}_2}{\partial z} = 0}}) + \underbrace{\vec{u}_z \underline{H}_z}_{\substack{\text{keine} \\ \text{x}_1\text{- und } \text{x}_2\text{-} \\ \text{Komponente}}} + \omega^2 \epsilon \mu (\underbrace{\vec{u}_1 \underline{H}_{x_1} + \vec{u}_2 \underline{H}_{x_2}}_{\substack{\text{enthält keine} \\ \text{z-Komponente}}} + \underbrace{\vec{u}_z \underline{H}_z}_{\substack{\text{keine} \\ \text{x}_1\text{- und } \text{x}_2\text{-} \\ \text{Komponente}}}) = 0. \quad (3.2.2.11)$$

Da \bar{u}_z nach (3.2.2.10) konstant ist, und da sich \bar{u}_1 und \bar{u}_2 bei Koordinatenänderungen nur so ändern, daß keine Anteile in z-Richtung entstehen, kann man an (3.2.2.11) in zwei Gleichungen separieren. Die eine dieser Gleichungen betrifft die Transversalkomponenten \underline{H}_{x1} und \underline{H}_{x2} , die andere die Longitudinalkomponente \underline{H}_z . Man erhält für die Transversalkomponenten \underline{H}_{x1} und \underline{H}_{x2}

$$\Delta (\bar{u}_1 \underline{H}_{x1} + \bar{u}_2 \underline{H}_{x2}) + \omega^2 \epsilon \mu (\bar{u}_1 \underline{H}_{x1} + \bar{u}_2 \underline{H}_{x2}) = 0 \quad (3.2.2.12)$$

und für die Longitudinalkomponente \underline{H}_z

$$\Delta \underline{H}_z + \omega^2 \epsilon \mu \underline{H}_z = 0. \quad (3.2.2.13)$$

Für $\Delta \underline{H}_z$ gilt, siehe S. 35,

$$\Delta \underline{H}_z = \frac{1}{g_1 g_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(g_1 g_2 \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial z} \right) \right].$$

Im Falle ebener Wellen, die längs der z-Achse wandern, gilt

$$\underline{H}_z = \underline{H}_0(x_1, x_2) \cdot e^{\mp \gamma z} \underline{H}_{x1} = \underline{H}_{x1,0}(x_1, x_2) \cdot e^{\mp \gamma z} \underline{H}_{x2} = \underline{H}_{x2,0}(x_1, x_2) \cdot e^{\mp \gamma z}.$$

Dann erhält man

$$\Delta \underline{H}_z = \frac{1}{g_1 g_2} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{g_2}{g_1} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{g_1}{g_2} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x_2} \right) + \gamma^2 g_1 g_2 \underline{H}_z \right] = \Delta_{x_1, x_2} \underline{H}_z + \gamma^2 \underline{H}_z.$$

Aus (3.2.2.12) folgt

$$\Delta_{x_1, x_2} (\bar{u}_1 \underline{H}_{x1} + \bar{u}_2 \underline{H}_{x2}) + (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) (\bar{u}_1 \underline{H}_{x1} + \bar{u}_2 \underline{H}_{x2}) = 0. \quad (3.2.2.14)$$

Entsprechend erhält man aus (3.2.2.13)

$$\Delta_{x_1, x_2} \underline{H}_z + (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) \underline{H}_z = 0. \quad (3.2.2.15)$$

Die entsprechenden Ausdrücke für die elektrischen Feldstärken lauten

$$\Delta_{x_1 x_2} (\bar{u}_1 \underline{E}_{x_1} + \bar{u}_2 \underline{E}_{x_2}) + (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) (\bar{u}_1 \underline{E}_{x_1} + \bar{u}_2 \underline{E}_{x_2}) = 0 \quad (3.2.2.16)$$

und

$$\Delta_{x_1 x_2} \underline{E}_z + (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) \underline{E}_z = 0. \quad (3.2.2.17)$$

Beispielkartesische Koordinaten: $x_1 = x$, $x_2 = y$, $\bar{u}_x = \text{const}$, $\bar{u}_y = \text{const}$

$$\begin{aligned} \Delta_{x,y} (\bar{u}_x \underline{H}_x + \bar{u}_y \underline{H}_y) &= \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \cdot (\bar{u}_x \underline{H}_x + \bar{u}_y \underline{H}_y) = \\ &= \bar{u}_x \left(\frac{\partial^2 \underline{H}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_x}{\partial y^2} \right) + \bar{u}_y \left(\frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_y}{\partial y^2} \right), \end{aligned} \quad (3.2.2.18)$$

$$\Delta_{x,y} \underline{H}_z = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \underline{H}_z. \quad (3.2.2.19)$$

Diese Ausdrücke sind in (3.2.2.14) bzw. (3.2.2.15) einzusetzen.

BeispielZylinderkoordinaten: $x_1 = r$, $x_2 = \varphi$

$$\Delta_{r,\varphi} (\bar{u}_r \underline{H}_r + \bar{u}_\varphi \underline{H}_\varphi) = \bar{u}_r \left[\Delta_{r,\varphi} \underline{H}_r - \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial \underline{H}_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{\underline{H}_r}{r^2} \right] + \bar{u}_\varphi \left[\Delta_{r,\varphi} \underline{H}_\varphi + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial \underline{H}_r}{\partial \varphi} - \frac{\underline{H}_\varphi}{r^2} \right]. \quad (3.2.2.20)$$

mit

$$\Delta_{r\varphi} \underline{H}_{r\varphi} = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \underline{H}_{r\varphi}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \underline{H}_{r\varphi}}{\partial \varphi^2} \quad (3.2.2.21)$$

und

$$\Delta_{r\varphi} \underline{H}_z = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial \varphi^2} . \quad (3.2.2.22)$$

Siehe hierzu auch Menge/Gundlach neu S. B2!

Diese Ausdrücke sind in (3.2.2.14) bzw. (3.2.2.15) einzusetzen.

Berechnen der Transversal- aus den Longitudinalkomponenten: Wenn man für eine Welle die Differentialgleichungen (3.2.2.15) und (3.2.2.17) für die Longitudinalkomponenten \underline{H}_z bzw. \underline{E}_z gelöst hat, kann man aus diesen Lösungen die Querkomponenten $\underline{H}_{x1}, \underline{H}_{x2}, \underline{E}_{x1}$ und \underline{E}_{x2} auf dem entarteten Welle berechnen. Bei dieser Berechnung tritt die Größe

$$Z_{F_{\text{eff}}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \mu_r}{\epsilon_0 \epsilon_r}} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} = (120\pi \Omega) \cdot \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}} \quad (3.2.2.23)$$

auf. Diese Größe heißt Feldwellenwiderstand der ebenen homogenen Welle. Im Falle $\epsilon_r = \mu_r = 1$ erhält man den Feldwellenwiderstand

$$Z_{F_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi \Omega = 377 \Omega \quad (3.2.2.24)$$

der ebenen homogenen Welle im leeren Raum.

Aus den Longitudinalkomponenten \underline{H}_z und \underline{E}_z ergeben sich die Transversalkomponenten gemäß

$$\underline{E}_{x_1} (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) = \mp \frac{\gamma}{g_1} \cdot \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x_1} - j \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{g_2} \cdot Z_{F\epsilon\mu} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x_2}, \quad (3.2.2.25)$$

$$\underline{H}_{x_2} (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) = \mp \frac{\gamma}{g_2} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x_2} - j \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{g_1} \cdot \frac{1}{Z_{F\epsilon\mu}} \cdot \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x_1}, \quad (3.2.2.26)$$

$$\underline{E}_{x_2} (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) = \mp \frac{\gamma}{g_2} \cdot \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x_2} + j \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{g_1} \cdot Z_{F\epsilon\mu} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x_1}, \quad (3.2.2.27)$$

$$\underline{H}_{x_1} (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu) = \mp \frac{\gamma}{g_1} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x_1} + j \frac{\omega \sqrt{\epsilon \mu}}{g_2} \cdot \frac{1}{Z_{F\epsilon\mu}} \cdot \frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x_2}. \quad (3.2.2.28)$$

Beim ersten Term auf der rechten Seite gilt das Minuszeichen für die in Richtung wachsender z wandernde Welle, das Pluszeichen für die in Richtung abnehmender z wandernde Welle.

Wellen mit verschwindenden Longitudinalkomponenten \underline{H}_z und \underline{E}_z : Falls es Wellen gibt, beidene

$$\underline{H}_z \equiv 0 \quad (3.2.2.29)$$

und

$$\underline{E}_z \equiv 0 \quad (3.2.2.30)$$

ist (TEM-Wellen), so folgt für diese Wellen aus (3.2.2.25) bis (3.2.2.28)

$$\gamma^2 + \omega^2 \epsilon \mu = 0, \quad (3.2.2.31)$$

d.h.

$$\gamma = \pm j \omega \sqrt{\epsilon \mu} \quad (3.2.2.32)$$

und somit

$$\alpha = 0, \quad (3.2.2.33)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon \mu}. \quad (3.2.2.34)$$

3.3. Ebene homogene Wellen im freien Raum

2001-12-07

3.3.1. Feldstärken

Eigenschaften des Raums:

$$\begin{aligned}\mu &= \mu_0, \\ \varepsilon &= \varepsilon_0, \\ \kappa &= 0.\end{aligned}\tag{3.3.1.1}$$

Koordinatensystem: Rechtshändig kartesisch, somit $x_1=x, x_2=y, x_3=z$

$$\begin{aligned}g_1 &= g_2 = 1, \\ g_3 &= 1 \quad (\text{ohnehin}).\end{aligned}\tag{3.3.1.2}$$

Voraussetzungen (versuchsweise) für die Feldstärke in z-Richtung:

$$\underline{H}_z \equiv 0,\tag{3.3.1.3}$$

$$\underline{E}_z \equiv 0.\tag{3.3.1.4}$$

Phasenmaß: Wegen (3.3.1.3) gelten (3.2.2.33) und (3.2.2.34), d.h.

$$\beta = \omega \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \beta_0.\tag{3.3.1.5}$$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit: Mit (3.3.1.5) folgt aus (3.1.2.3) und (3.1.2.5)

$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = v_g = \frac{\partial \omega}{\partial \beta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0}} = c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}.\tag{3.3.1.6}$$

Feldkomponenten: Aus (3.2.2.16) folgt wegen $\gamma^2 + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0 = 0$ als eine mögliche Konfiguration des elektrischen Feldes

$$\Delta_{x_1, x_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{E}_{x_1} \\ \underline{E}_{x_2} \end{pmatrix}}_{\vec{u}_1 \underline{E}_{x_1} + \vec{u}_2 \underline{E}_{x_2}} = \Delta_{x, Y} \begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

somit

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{E}_{x_0} \\ \underline{E}_{y_0} \end{pmatrix}}_{\text{konst.}} \cdot e^{-\beta z}. \quad (3.3.1.7)$$

Mit (3.3.1.7) folgt aus (3.2.1.20)

$$\begin{aligned} \underline{H}_x &= \frac{1}{-j\omega\mu_0} \cdot \text{rot}_x \vec{E} = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \cdot \left(\underbrace{\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial y}}_{=0} - \frac{\partial \underline{E}_y}{\partial z} \right) = \frac{\beta}{-j\omega\mu_0} \underline{E}_{y_0} \cdot e^{-\beta z} = \\ &= \underbrace{\frac{\beta/\omega\mu_0}{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}}}_{\underline{H}_{x_0}} \cdot \underline{E}_{y_0} e^{-\beta z} \end{aligned} \quad (3.3.1.8)$$

und aus (3.2.1.21) entsprechend

$$\begin{aligned} \underline{H}_y &= \frac{1}{-j\omega\mu_0} \cdot \text{rot}_y \vec{E} = \frac{1}{-j\omega\mu_0} \cdot \left(\frac{\partial \underline{E}_x}{\partial z} - \underbrace{\frac{\partial \underline{E}_z}{\partial x}}_{=0} \right) = \frac{-\beta}{-j\omega\mu_0} \underline{E}_{x_0} \cdot e^{-\beta z} = \\ &= \underbrace{\frac{\beta/\omega\mu_0}{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}}}}_{\underline{H}_{y_0}} \cdot \underline{E}_{x_0} e^{-\beta z}. \end{aligned} \quad (3.3.1.9)$$

Die bereits in (3.2.2.24) eingeführte Größe

$$Z_{F_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = -\frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = 120\pi \Omega = 377\Omega \quad (3.3.1.10)$$

heißt Feldwellenwiderstand des freien Raums. Wegen $\underline{E}_y = \underline{E}_{y_0} \cdot e^{-\beta z}$ folgt aus (3.3.1.10) auch

$$-\frac{\underline{E}_{y_0}}{\underline{H}_{x_0}} = \frac{\underline{E}_{x_0}}{\underline{H}_{y_0}} = Z_{F_0}.$$

Leistungstransport: Aus \vec{P}^* nach (3.2.1.37) folgt mit (3.3.1.8) bis (3.3.1.10)

$$\vec{P}^* = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{Re} \begin{vmatrix} \vec{u}_x & \vec{u}_y & \vec{u}_z \\ Z_{F_0} \cdot \underline{H}_{y_0} e^{-\beta z} & -Z_{F_0} \cdot \underline{H}_{x_0} e^{-\beta z} & 0 \\ \underline{H}_{x_0}^* e^{\beta z} & \underline{H}_{y_0}^* e^{\beta z} & 0 \end{vmatrix}. \quad (3.3.1.11)$$

Anmerkung: Der Stern bei \vec{P}^* ist Bestandteil der Bezeichnung des Poynting-Vektors, wohingegen \vec{H}^* eine konjugiert komplexe Größe darstellt.

Aus (3.3.1.11) folgt

$$P_x^* = P_y^* = 0 \quad (3.3.1.12)$$

und

$$P_z^* = \frac{1}{2} Z_{F_0} \left(|\underline{H}_{y_0}|^2 + |\underline{H}_{x_0}|^2 \right) = \frac{1}{2 \cdot Z_{F_0}} \left(|\underline{E}_{x_0}|^2 + |\underline{E}_{y_0}|^2 \right). \quad (3.3.1.13)$$

Momenteantwort: Aus den komplexen Amplituden erhält man die Momentenwerte

$$\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{H}_{x_0} \\ \underline{H}_{y_0} \end{pmatrix} \right\} \quad (3.3.1.14)$$

und

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot Z_{F_0} \cdot \begin{pmatrix} \underline{H}_{y_0} \\ -\underline{H}_{x_0} \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t - \beta z)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_{x_0} \\ \underline{E}_{y_0} \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.3.1.15)$$

Wellenwandler in Richtung abnehmender z: Anstelle von (3.3.1.7), (3.3.1.8), (3.3.1.9), (3.3.1.14) und (3.3.1.15) erhält man

$$\begin{pmatrix} \underline{H}_x \\ \underline{H}_y \\ \underline{E}_x \\ \underline{E}_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{H}_{x_0} \\ \underline{H}_{y_0} \\ \underline{E}_{x_0} \\ \underline{E}_{y_0} \end{pmatrix} \cdot e^{\beta z}, \quad (3.3.1.16)$$

$$\underline{E}_x = \underbrace{-Z_{F_0} \underline{H}_{y_0}}_{\underline{E}_{x_0}} \cdot e^{\beta z}, \quad (3.3.1.17)$$

$$\underline{E}_y = \underbrace{Z_{F_0} \underline{H}_{x_0}}_{\underline{E}_{y_0}} \cdot e^{\beta z}, \quad (3.3.1.18)$$

$$\begin{pmatrix} h_x \\ h_y \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t + \beta z)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{H}_{x_0} \\ \underline{H}_{y_0} \end{pmatrix} \right\}, \quad (3.3.1.19)$$

$$\begin{pmatrix} e_x \\ e_y \end{pmatrix} = \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t + \beta z)} \cdot Z_{F_0} \cdot \begin{pmatrix} -\underline{H}_{y_0} \\ \underline{H}_{x_0} \end{pmatrix} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ e^{j(\omega t + \beta z)} \cdot \begin{pmatrix} \underline{E}_{x_0} \\ \underline{E}_{y_0} \end{pmatrix} \right\}. \quad (3.3.1.20)$$

3.3.2. Polarisation

2001-12-14

Unter Polarisation versteht man die Ausrichtung des elektrischen und magnetischen Feldvektors im Raum. Die Beachtung der Polarisation bzw. das Erzeugen ganz bestimmter Polarisationen ist wichtig bei einer Reihe von Anwendungsfällen, z.B.:

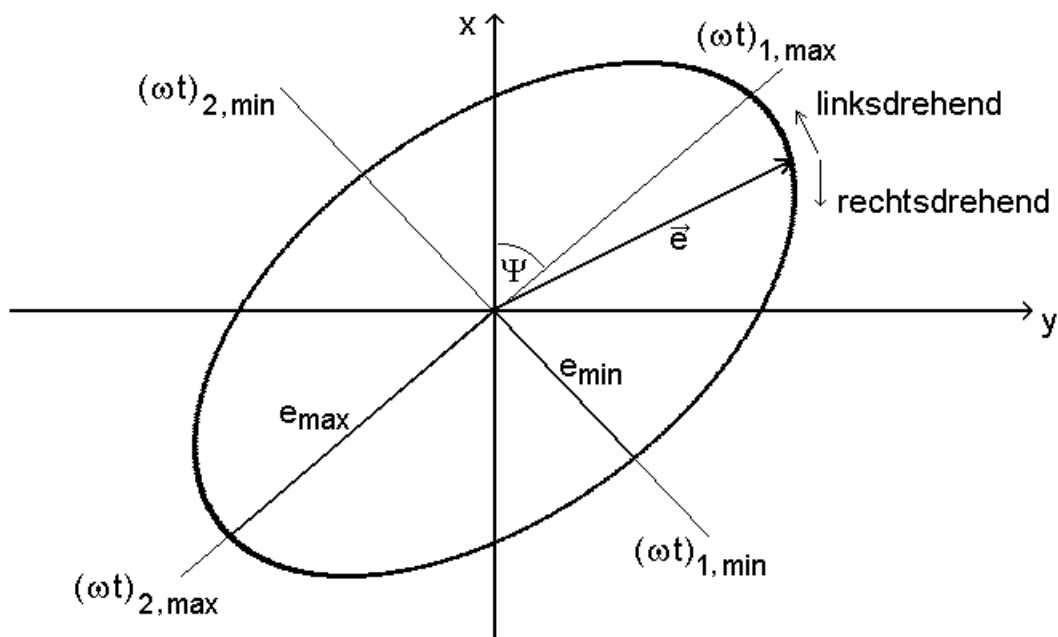
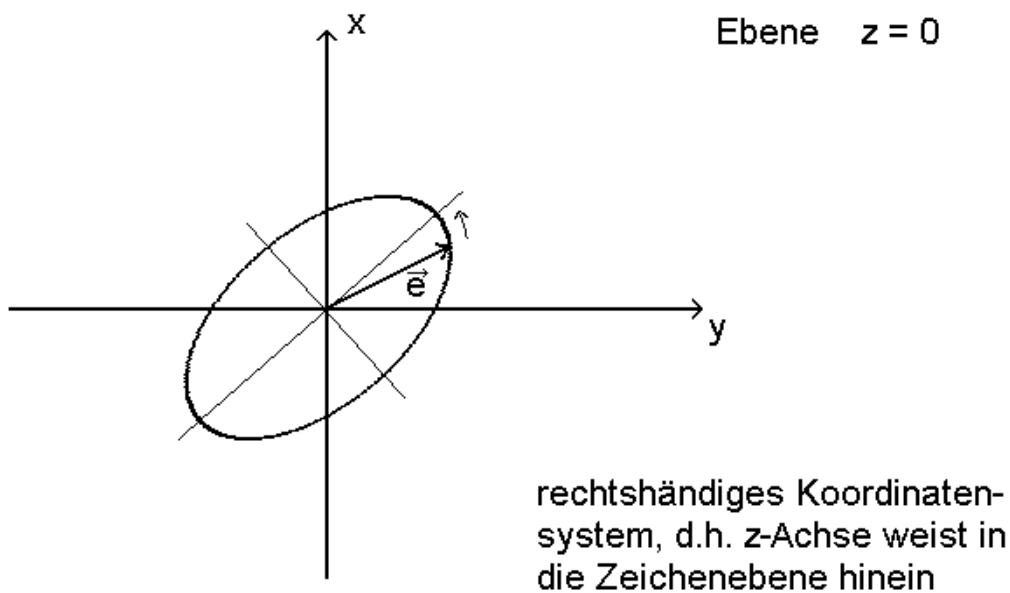
- Objektidentifikation mit polarisationsagilem Radar,
- Gleichkanalübertragung mit Polarisationmultiplex bei Richtfunkantennen. Hierbei wichtig: Depolarisationskompensator (cross polarization interference canceller XPIC),
- Vermindern des durch Niederschläge bewirkten Radar-Clutters durch zirkulare Polarisation, weil Rückstreuquerschnitt eines diffusen Radarziels bei Zirkularpolarisation sehr klein - theoretisch null - ist.

Es werde die Zeitabhängigkeit der elektrischen Feldstärke bei $z=0$ betrachtet. Aus (3.3.1.15) folgt - die Wellen wandern in Richtung wachsender z -

$$e_x = \operatorname{Re} \left[e^{j\omega t} \cdot \underline{E}_{x0} \right] = \underbrace{\operatorname{Re} \left[\underline{E}_{x0} \right]}_A \cdot \cos(\omega t) - \underbrace{\operatorname{Im} \left[\underline{E}_{x0} \right]}_B \cdot \sin(\omega t), \quad (3.3.2.1)$$

$$e_y = \operatorname{Re} \left[e^{j\omega t} \cdot \underline{E}_{y0} \right] = \underbrace{\operatorname{Re} \left[\underline{E}_{y0} \right]}_C \cdot \cos(\omega t) - \underbrace{\operatorname{Im} \left[\underline{E}_{y0} \right]}_D \cdot \sin(\omega t). \quad (3.3.2.2)$$

In der Regel durchläuft die Spitze des Vektors \vec{E} eine Ellipse:



Durch geometrische Betrachtungen erhält man für die Größen in obigem Bild abhängig von A, B, C und D folgende Ausdrücke:

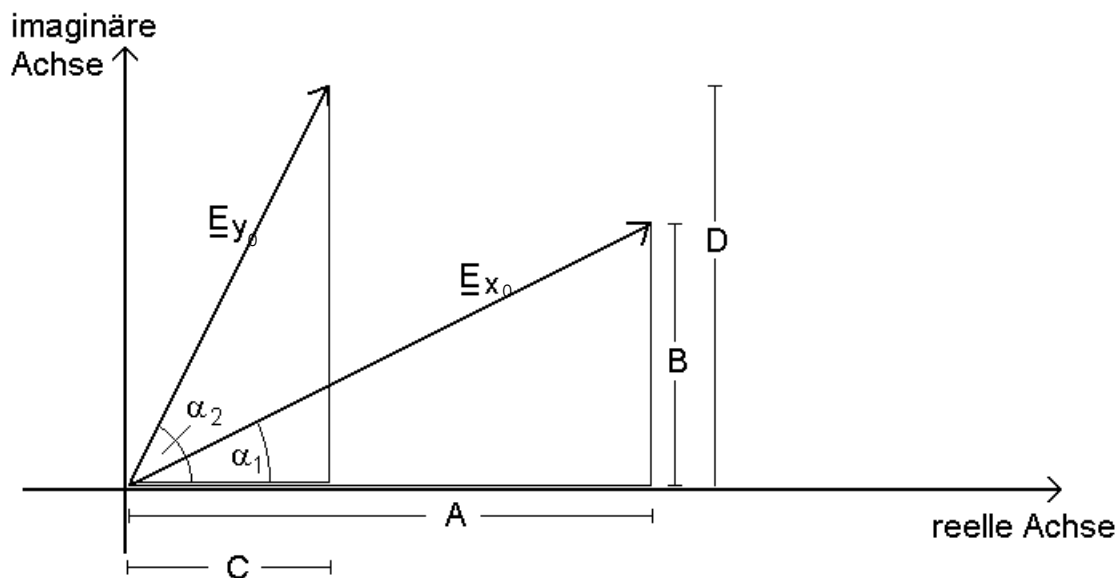
$$|\vec{e}| = e = \left\{ \frac{1}{2} (A^2 + C^2 + B^2 + D^2) + \frac{1}{2} (A^2 + C^2 - B^2 - D^2) \cdot \cos(2\omega t) - (AB + CD) \cdot \sin(2\omega t) \right\}^{1/2}, \quad (3.3.2.3)$$

$$e_{m \text{ ax, m in}} = \left\{ \frac{1}{2} (A^2 + C^2 + B^2 + D^2) \pm \sqrt{\frac{1}{4} (A^2 + C^2 - B^2 - D^2)^2 + (AB + CD)^2} \right\}^{1/2}, \quad (3.3.2.4)$$

$$\tan \left[2 (\omega t)_{1,2 \text{ m in, m ax}} \right] = - \frac{2 (AB + CD)}{A^2 + B^2 - C^2 - D^2}, \quad (3.3.2.5)$$

$$\tan (\psi) = \frac{e_y \left[(\omega t)_{1 \text{ m ax}} \right]}{e_x \left[(\omega t)_{1 \text{ m ax}} \right]} = \frac{C \cdot \cos \left[(\omega t)_{1 \text{ m ax}} \right] - D \cdot \sin \left[(\omega t)_{1 \text{ m ax}} \right]}{A \cdot \cos \left[(\omega t)_{1 \text{ m ax}} \right] - B \cdot \sin \left[(\omega t)_{1 \text{ m ax}} \right]}. \quad (3.3.2.6)$$

Drehsinn:



- $0 < \alpha_2 - \alpha_1 < 180^\circ$: e_y eilt gegen e_x vor, d.h. linksdrehend polarisiert.
 $0 < \alpha_1 - \alpha_2 < 180^\circ$: e_x eilt gegen e_y vor, d.h. rechtsdrehend polarisiert.
 $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$ oder 180° : e_y und e_x gleich- oder gegenphasig, d.h. linear polarisiert.

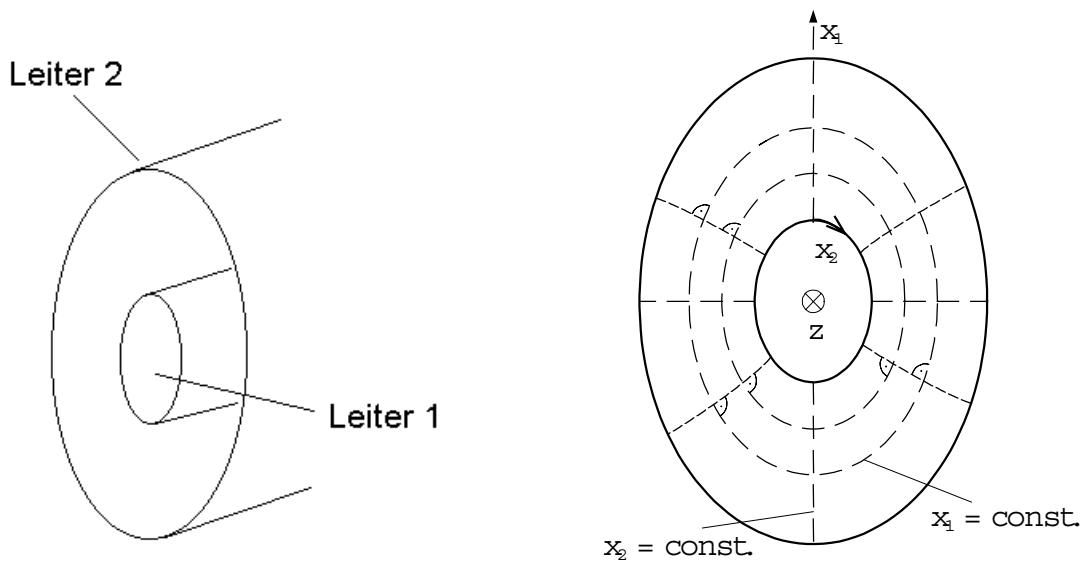
3.4.1. Feldstärken

Eigenschaften des Raums:

$$\left. \begin{array}{l} \mu = \mu_0 \\ \epsilon = \epsilon_0 \\ \kappa = 0 \end{array} \right\} \text{außerhalb der Leiter} \quad (3.4.1.1)$$

$\kappa \rightarrow \infty$ in den Leitern

Koordinatensystem (gestrichelt):



Es ist zweckmäßig, das Koordinatensystem so zu wählen, daß die Leiteroberflächen Orte $x_1 = \text{const.}$ bzw. $x_2 = \text{const.}$ sind.

Feldstärken in z-Richtung (TEM-Wellen):

2001-12-07

$$\underline{H}_z \equiv 0, \quad (3.4.1.2)$$

$$\underline{E}_z \equiv 0. \quad (3.4.1.3)$$

Phasenmaß: Wegen (3.4.1.2) und (3.4.1.3) gilt (3.2.2.34), d.h.:

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \cdot \mu_0} = \beta_0. \quad (3.4.1.4)$$

Phasen und Gruppengeschwindigkeit: Mit (3.4.1.4) folgt aus (3.1.2.3) bzw. (3.1.2.5)

$$v_p = v_g = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c_0 = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}}. \quad (3.4.1.5)$$

Feldkomponenten: Aus (3.2.2.16) folgt wegen (3.2.2.31)

$$\Delta_{x_1, x_2} \begin{pmatrix} \underline{E}_{x_1} \\ \underline{E}_{x_2} \end{pmatrix} = \Delta_{x_1, x_2} \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{E}_{x_1, 0} \\ \underline{E}_{x_2, 0} \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Komponenten} \\ \text{für } z=0}} \cdot e^{-\beta z} = 0$$

und somit

$$\Delta_{x_1, x_2} \begin{pmatrix} \underline{E}_{x_1, 0} \\ \underline{E}_{x_2, 0} \end{pmatrix} = 0. \quad (3.4.1.6)$$

Die beidenebenen homogenen Wellen im leeren Raum gefundene Lösung

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_{x_1,0} \\ \underline{E}_{x_2,0} \end{pmatrix} = \text{const.}$$

kommt hier nicht in Betracht, weil an den metallischen Wänden die elektrische Tangentialfeldstärke verschwinden muß.

Die Komponenten $\underline{E}_{x_1,0}$ und $\underline{E}_{x_2,0}$ hängen nur von x_1 und x_2 ab. Faßt man diese Komponenten zur vektoriellen Querkomponente

$$\vec{\underline{E}}_{\text{tr}} = \begin{pmatrix} \underline{E}_{x_1,0} \\ \underline{E}_{x_2,0} \end{pmatrix} = \vec{u}_1 \cdot \underline{E}_{x_1,0} + \vec{u}_2 \cdot \underline{E}_{x_2,0} \quad (3.4.1.7)$$

zusammen, so folgt aus (3.4.1.6)

$$\Delta_{x_1, x_2} \vec{\underline{E}}_{\text{tr}} = 0. \quad (3.4.1.8)$$

Für $\vec{\underline{E}}_{\text{tr}}$ wird versuchsweise der Ansatz

$$\vec{\underline{E}}_{\text{tr}} = \underline{k} \cdot \text{grad} \Phi \quad (3.4.1.9)$$

gemacht, wobei \underline{k} : dimensionslose Konstante,
 Φ : elektrostatisches Potential,
 $\text{grad} \Phi$: elektrostatisches Feld $\vec{e}_{\text{tr}} = \text{grad} \Phi$.

Für Φ gilt

$$\Delta_{x_1, x_2} \Phi = 0, \quad (3.4.1.10)$$

wobei an den metallischen Wänden die Randbedingungen $\vec{\underline{E}}_{\text{tr, tang}} = 0$ erfüllt sei.

Einsetzen von \vec{E}_{tr} nach (3.4.1.9) in die linke Seite von (3.4.1.8) ergibt

$$\Delta_{x_1, x_2} \vec{E}_{\text{tr}} = \underbrace{\text{grad div } \vec{E}_{\text{tr}} - \text{rot rot } \vec{E}_{\text{tr}}}_{\text{Zinke/Brunswick. Bd I, S. 420}} = \underbrace{\text{grad div } (\underline{k} \cdot \text{grad } \Phi)}_{\substack{\underline{k} \cdot \Delta_{x_1, x_2} \Phi = 0 \\ \text{wegen } \Delta_{x_1, x_2} \Phi = 0}} - \underbrace{\text{rot rot } (\underline{k} \cdot \text{grad } \Phi)}_{\equiv 0}. \quad (3.4.1.11)$$

(3.4.1.11) zeigt folgendes: Wenn man das elektrostatische Feld \vec{e}_{tr} gefunden hat, das für den gegebenen Wellenvektor \underline{k} gilt, so erhält man aus dem Feld \vec{e}_{tr} die komplexe vektorielle Feldamplitude

$$\vec{E}_{\text{tr}} = \underline{k} \cdot \vec{e}_{\text{tr}} = \underline{k} (\vec{u}_1 e_{x_1} + \vec{u}_2 e_{x_2}). \quad (3.4.1.12)$$

Entsprechend gilt

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_{x_1} \\ \underline{E}_{x_2} \end{pmatrix} = \underline{k} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} e_{x_1} \\ e_{x_2} \end{pmatrix}}_{\begin{pmatrix} \underline{E}_{x_1, \rho} \\ \underline{E}_{x_2, \rho} \end{pmatrix}} \cdot e^{-\beta z}. \quad (3.4.1.13)$$

Mit (3.4.1.13) folgt aus (3.2.1.20) mit $\epsilon_3 = 1$ und $\underline{E}_{x_3} = \underline{E}_z \equiv 0$

$$\underline{H}_{x_1} = \frac{1}{-\jmath \omega \mu_0} \cdot \text{rot}_{x_1} \vec{E} = \frac{1}{-\jmath \omega \mu_0} \cdot \frac{-\partial \underline{E}_{x_2}}{\partial z} = -\frac{\beta}{\jmath \omega \mu_0} \cdot \underline{E}_{x_2} = \underbrace{-\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \underline{E}_{x_2, \rho}}_{\underline{H}_{x_1, \rho}} \cdot e^{-\beta z}. \quad (3.4.1.14)$$

und aus (3.2.1.21)
2002-12-13

$$\underline{H}_{x_2} = \frac{1}{-\dot{\jmath}\mu_0} \cdot \text{rot}_{x_2} \vec{E} = \frac{1}{-\dot{\jmath}\mu_0} \cdot \frac{-\partial \underline{E}_{x_1}}{\partial z} = \frac{-\beta}{-\dot{\jmath}\mu_0} \cdot \underline{E}_{x_1} =$$

$$\underbrace{\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \underline{E}_{x_1,0}}_{\underline{H}_{x_2,0}} \cdot e^{-\beta z}. \quad (3.4.1.15)$$

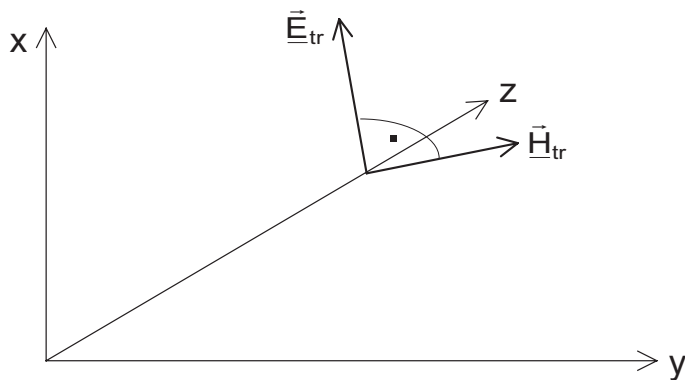
Wie beiderebenen homogenen Wellen in freiem Raum ergibt sich, siehe (3.3.1.10),

$$Z_{F_0} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = -\frac{\underline{E}_{x_2}}{\underline{H}_{x_1}} = \frac{\underline{E}_{x_1}}{\underline{H}_{x_2}} =$$

$$-\frac{\underline{E}_{x_2,0}}{\underline{H}_{x_1,0}} = \frac{\underline{E}_{x_1,0}}{\underline{H}_{x_2,0}} =$$

$$-\frac{e_{x_2}}{h_{x_1}} = \frac{e_{x_1}}{h_{x_2}} = 120\pi \Omega = 377 \Omega. \quad (3.4.1.16)$$

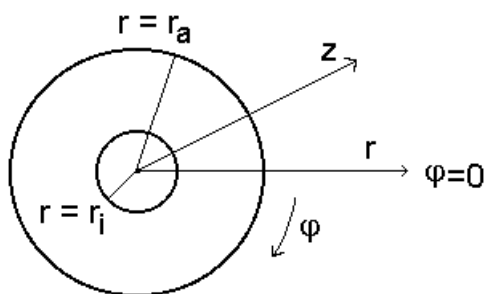
Allgemein:



$$\frac{\underline{E}_{tr}}{\underline{H}_{tr}} = Z_{F_0}. \quad (3.4.1.17)$$

Beispiel Koaxialleitung:

Koordinatensystem $x_1=r$, $x_2=\varphi$, $x_3=z$



Elektrostatisches Feld: U sei Gleichspannung zwischen Innen- und Außenleiter.

$$\vec{e}_r = \begin{pmatrix} e_r \\ e_\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{U}{r \ln\left(\frac{r_a}{r_i}\right)} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{für} \quad r_i \leq r \leq r_a, \quad (3.4.1.18)$$

$$\vec{e}_r = 0 \quad \text{sonst.}$$

Das elektrostatische Feld nach (3.4.1.18) erfüllt die Randbedingungen an den metallischen Oberflächen.

Dynamisches Feld:

2001-12-07

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_{r,\rho} \\ \underline{E}_{\varphi,\rho} \end{pmatrix} = \underline{k} \cdot \begin{pmatrix} \frac{U}{r \ln(\frac{r_a}{r_1})} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad r_1 \leq r \leq r_a \quad (3.4.1.19)$$

$$\begin{pmatrix} \underline{E}_{r,\rho} \\ \underline{E}_{\varphi,\rho} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{sonst.}$$

Somit

$$\underline{E}_r = \underline{k} \cdot \frac{U}{r \cdot \ln(\frac{r_a}{r_1})} \cdot e^{-\beta z} = \underline{k} \cdot \underbrace{\frac{U}{r_1 \cdot \ln(\frac{r_a}{r_1})}}_{\underline{E}_{r_1,0}} \cdot \frac{r_1}{r} \cdot e^{-\beta z} = \underline{E}_{r_1,0} \cdot \frac{r_1}{r} \cdot e^{-\beta z}, \quad r_1 \leq r \leq r_a, \quad (3.4.1.20)$$

$$\underline{E}_r = 0 \quad \text{sonst}$$

und

$$\underline{E}_\varphi = 0. \quad (3.4.1.21)$$

Aus (3.4.1.20) und (3.4.1.21) folgt mit (3.4.1.14) und (3.4.1.15) für $r_1 \leq r \leq r_a$

$$\underline{H}_r \equiv 0, \quad (3.4.1.22)$$

$$\underline{H}_\varphi = \frac{\underline{E}_r}{Z_{F_0}} = \underbrace{\frac{\underline{E}_{r_1,0}}{Z_{F_0}}}_{\underline{H}_{\varphi,r_1,0}} \cdot \frac{r_1}{r} \cdot e^{-\beta z}. \quad (3.4.1.23)$$

Energiebetrachtung:

2001-12-07

Spezifische elektrische Feldenergie:

$$w_e = \frac{\epsilon_0}{2} (e_{x_1}^2 + e_{x_2}^2) = \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \operatorname{Re} e^2 \underline{E}_{x_1,0} \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{j\omega t} + \frac{\epsilon_0}{2} \cdot \operatorname{Re} e^2 \underline{E}_{x_2,0} \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{j\omega t} . \quad (3.4.1.24)$$

Spezifische magnetische Feldenergie:

$$\begin{aligned} w_m &= \frac{\mu_0}{2} (h_{x_1}^2 + h_{x_2}^2) = \\ &= \frac{\mu_0}{2} \operatorname{Re} e^2 \left(-\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \underline{E}_{x_2,0} \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{j\omega t} \right) + \frac{\mu_0}{2} \operatorname{Re} e^2 \left(\sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} \cdot \underline{E}_{x_1,0} \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{j\omega t} \right) = \\ &= \frac{\epsilon_0}{2} \operatorname{Re} e^2 \underline{E}_{x_1,0} \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{j\omega t} + \frac{\epsilon_0}{2} \operatorname{Re} e^2 \underline{E}_{x_2,0} \cdot e^{-\beta z} \cdot e^{j\omega t} . \end{aligned} \quad (3.4.1.25)$$

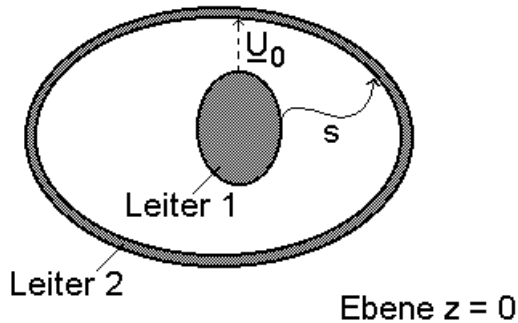
Aus (3.4.1.24) und (3.4.1.25) folgt

$$w_e = w_m , \quad (3.4.1.26)$$

d.h. die spezifische elektrische und die spezifische magnetische Feldenergie sind gleich, hängen aber von Ort und Zeit ab.

Übungsaufgabe: Zeigen sie, daß bei einer TEM Welle $w_e = w_m$ gilt.

Spannung:



Aus der elektrischen Feldstärke ergibt sich die Spannung zwischen den beiden Leitern des Zweileitersystems bei $z=0$ zu

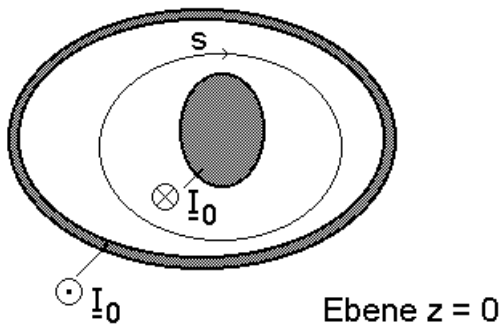
$$U_0 = \int_s \vec{E}_{tr} d\vec{s} \tag{3.4.2.1}$$

s verläuft in der Ebene $z=0$.

U_0 hängt nicht ab von der speziellen Wahl des Weges s in der Ebene $z=0$. Mit U_0 nach (3.4.2.1) ergibt sich die Spannung U abhängig von z zu

$$U(z) = U_0 \cdot e^{-\beta z} \tag{3.4.2.2}$$

Strom: Aus der magnetischen Feldstärke \vec{H}_{tr} bei $z=0$ folgt über das Durchflutungsgesetz



$$I_0 = \int_s \vec{H}_{tr} d\vec{s} \tag{3.4.2.3}$$

s verläuft in der Ebene $z=0$. Das dem \vec{H}_{tr} gemäß (3.4.2.3) zugeordnete \vec{I}_0 hängt nicht ab von der Wahl des Weges s in der Ebene $z=0$. Mit \vec{I}_0 nach (3.4.2.3) ergibt sich der Strom abhängig von z zu

$$\underline{I}(z) = \vec{I}_0 \cdot e^{-\beta z}. \quad (3.4.2.4)$$

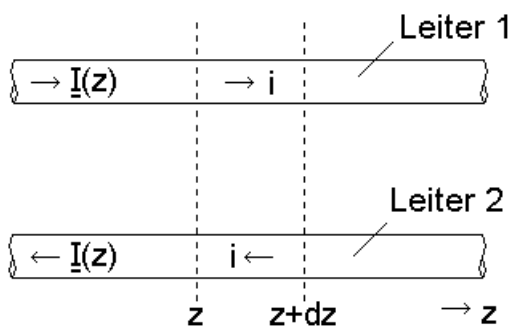
Wellenwiderstand: Aufgrund der Phasengleichheit von \vec{E}_{tr} und \vec{H}_{tr} sind auch $\underline{U}(z)$ und $\underline{I}(z)$ in Phase, d.h.

$$\frac{\underline{U}(z)}{\underline{I}(z)} = \frac{u(z)}{i(z)} = Z_L \quad (\text{reell!}). \quad (3.4.2.5)$$

Die Größe Z_L ist charakteristisch für das jeweilige Zweileitersystem und heißt Wellenwiderstand des Zweileitersystems. Mit Z_L nach (3.4.2.5) folgt aus (3.4.2.4)

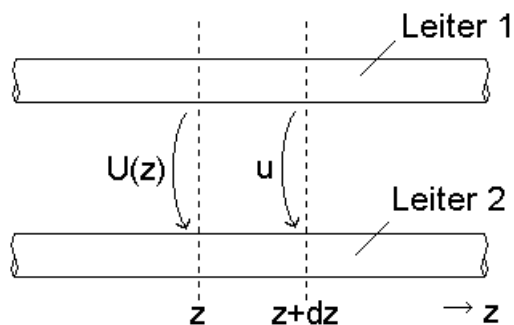
$$\underline{U}(z) = \underline{I}(z) \cdot Z_L = \vec{I}_0 \cdot Z_L e^{-\beta z}. \quad (3.4.2.6)$$

Induktivitätsbeleg: Der Induktivitätsbeleg L' ist definiert über die in einem Leiterstück der Länge dz vorhandene magnetische Feldenergie $dW_m = \frac{1}{2} \vec{I}^2 L' dz$, d.h.



$$L' = \frac{2 \cdot dW_m / dz}{I^2}. \quad (3.4.2.7)$$

Kapazitätsbeleg: Der Kapazitätsbeleg C' ist definiert über die in einem Leiterstück der Länge dz vorhandene elektrische Feldenergie $dW_e = \frac{1}{2}u^2 C' dz$, d.h.



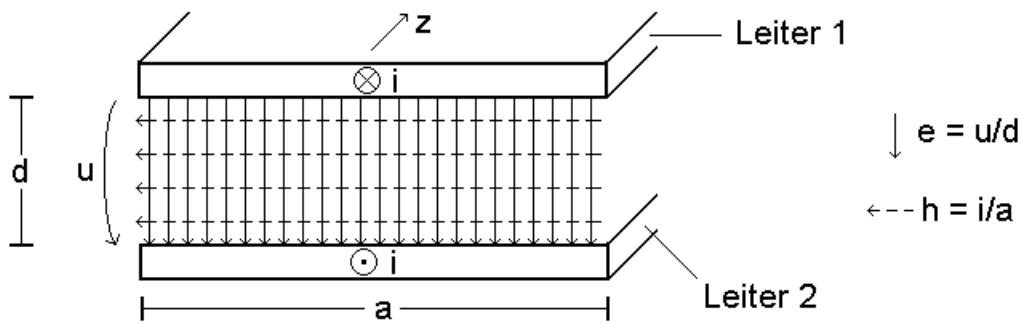
$$C' = \frac{2 \cdot dW_e / dz}{u^2} \quad (3.4.2.8)$$

Zusammenhang zwischen Wellenwiderstand und Leitungsbelegen: Aufgrund der Gleichheit der spezifischen elektrischen und magnetischen Feldenergien, siehe (3.4.1.26), gilt auch $dW_m = dW_e$ und somit

$$\frac{1}{2} L' dz = \frac{1}{2} u^2 C' dz,$$

d.h.

$$Z_L = \frac{u(z)}{i(z)} = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (3.4.2.9)$$



Aus (3.4.2.7) entsteht

$$L' = \frac{2 \cdot \frac{\mu_0}{2} h^2 a d}{I^2} = \frac{\mu_0 \left(\frac{i}{a}\right)^2 a d}{I^2} = \mu_0 \frac{d}{a} . \quad (3.4.2.10)$$

Aus (3.4.2.8) entsteht

$$C' = \frac{2 \cdot \frac{\epsilon_0}{2} e^2 a d}{u^2} = \frac{\epsilon_0 \left(\frac{u}{d}\right)^2 a d}{u^2} = \epsilon_0 \frac{a}{d} . \quad (3.4.2.11)$$

Aus (3.4.2.10) und (3.4.2.11) folgt

$$L' C' = \epsilon_0 \mu_0 . \quad (3.4.2.12)$$

Die Beziehung (3.4.2.12) gilt für alle Zweileitersysteme in inhomogenem Dielektrikum, wenn man an ϵ_0 durch ϵ und μ_0 durch μ ersetzt.

Der Wellenwiderstand der Bandleitung ergibt sich aus (3.4.2.10) und (3.4.2.11) zu

$$Z_L = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} \cdot \frac{d}{a} . \quad (3.4.2.13)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \omega \sqrt{L' C'} . \quad (3.4.2.14)$$

Weitere Leistungsbelege: Bei verlustbehafteten Leitungen müssen neben L' und C' der Widerstandsbeleg R' und der Ableitungsbeleg G' eingeführt werden.

Leistungstransport: Die von der Welle transportierte Leistung ergibt sich aus den Feldstärken in der Querschnittsfläche A des felderfüllten Raums zu

$$P = \int_A \vec{P}^*(x_1, x_2) d\vec{A} = \int_A \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \vec{E}_{\text{tr}}(x_1, x_2) \times \vec{H}_{\text{tr}}^*(x_1, x_2) \right\} d\vec{A} = \frac{1}{2} \int_A \frac{e_{\text{tr max}}^2(x_1, x_2)}{Z_{F_0}} dA = \frac{1}{2} \int_A Z_{F_0} \cdot h_{\text{tr max}}^2(x_1, x_2) dA . \quad (3.4.2.15)$$

Aus Strom und Spannung ergibt sich die Leistung zu

$$P = \frac{1}{2} U(z) \cdot I(z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{Z_L} U^2(z) = \frac{1}{2} Z_L I^2(z) . \quad (3.4.2.16)$$

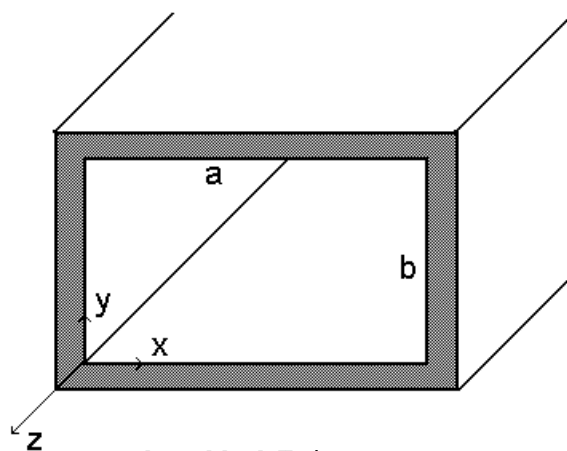
3.5. Hohlleiterwellen

2004-01-06

3.5.1. Hohlleiter

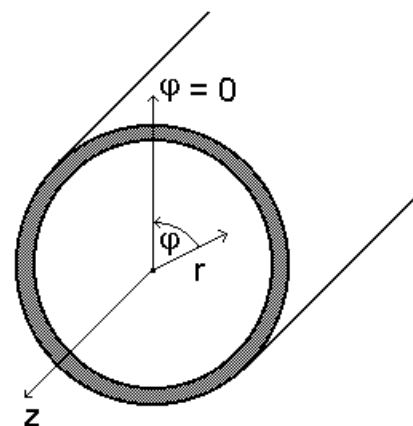
Hohlleiter sind zylindrische Metallrohre, die zur Führung elektromagnetischer Wellen in Rohrinneren benutzt werden.

Beispiele:



Rechteckhohlleiter

$$x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$$
$$g_1 = g_2 = g_3 = 1$$



Rundhohlleiter

$$x_1 = r, x_2 = \varphi, x_3 = z$$
$$g_1 = g_3 = 1, g_2 = r$$

Verlustfreiheit: Ein Hohlleiter ist verlustfrei, wenn

- spezifischer Widerstand der Wand $\rho = 0$,
- Dielektrikum im Inneren verlustfrei, d.h. $\epsilon_r'' = 0$ ($\epsilon_r = \epsilon_r' - j\epsilon_r''$); $\mu_r'' = 0$ ($\mu_r = \mu_r' - j\mu_r''$).

Im folgenden dient der verlustfreie Rechteckhohlleiter als Beispiel. Rundhohlleiter werden beispielsweise verwendet zum Realisieren von Drehkupplungen (rotary joints), siehe M. J. S. R. Radar Handbook, S. 8-17.

3.5.2. H-W ellentypen (TE-W ellentypen)

2002-03-12

H-W ellentypen sind durch

$$\underline{E}_z \equiv 0 \quad (3.5.2.1)$$

gekennzeichnet. Mit (3.5.2.1) folgt aus (3.2.2.25) bis (3.2.2.28), wenn die Welle in Richtung wachsender z wandert, mit $Z_{F_{\epsilon\mu}} = Z_{F_0} \sqrt{\frac{\mu_r}{\epsilon_r}}$ und mit $\epsilon_r = \mu_r = 1$

$$\underline{E}_x (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0) = -j\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cdot Z_{F_{\epsilon\mu}} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}, \quad (3.5.2.2)$$

$$\underline{H}_y (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0) = -\gamma \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} = -\beta \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y}, \quad (3.5.2.3)$$

$$\underline{E}_y (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0) = j\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cdot Z_{F_{\epsilon\mu}} \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}, \quad (3.5.2.4)$$

$$\underline{H}_x (\gamma^2 + \omega^2 \epsilon_0 \mu_0) = -\gamma \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} = -\beta \cdot \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x}. \quad (3.5.2.5)$$

Feldwellenwiderstand der H-Wellen: Aus (3.5.2.2) bis (3.5.2.5) folgt mit Z_{F_0} nach (3.2.2.24)

$$Z_{F_H} = \frac{\underline{E}_x}{\underline{H}_y} = -\frac{\underline{E}_y}{\underline{H}_x} = \frac{-j\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cdot Z_{F_0}}{-\beta} = \frac{\omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\beta} = \frac{\omega \mu_0}{\beta}. \quad (3.5.2.6)$$

Z_{F_H} heißt Feldwellenwiderstand der H-Wellen. Er kann aus (3.5.2.6) berechnet werden, sofern $\beta = f(\omega)$ bekannt ist.

Formulieren eines Eigenwertproblems: Aus (3.2.2.15) folgt mit $\gamma = \beta$

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial y^2} + (\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta^2) \cdot \underline{H}_z = 0. \quad (3.5.2.7)$$

Diese Differentialgleichung gilt für H-Wellen in beliebigen verlustfreien, leeren, zylindrischen Hohlleitern.

Bei der Lösung für den vorliegenden Rechteckhohlleiter geht man folgendermaßen vor:

- Man wählt einen Lösungsansatz $\underline{H}_z(x, y, z)$, der die Randbedingungen aus (3.2.1.32) erfüllt, d.h.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial x} &\equiv 0 && \text{bei } x = 0 \quad \text{und} \quad x = a, \\ \frac{\partial \underline{H}_z}{\partial y} &\equiv 0 && \text{bei } y = 0 \quad \text{und} \quad y = b, \end{aligned} \quad (3.5.2.8)$$

und noch freie Parameter enthält.

- Einsetzen des Ansatzes in die Differentialgleichung (3.5.2.7) und dadurch Bestimmen der freien Parameter.

Als Lösungsansatz wird gewählt

$$\underline{H}_z = \underline{H}_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}, \quad (m, n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.5.2.9)$$

Setzt man \underline{H}_z nach (3.5.2.9) in die Differentialgleichung (3.5.2.7) ein, so erhält man

$$\begin{aligned} &-\underline{H}_0 \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z} - \underline{H}_0 \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z} \\ &+ \underline{H}_0 \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z} \cdot (\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta^2) = 0. \end{aligned} \quad (3.5.2.10)$$

Aus (3.5.2.10) folgt, daß der Ansatz (3.5.2.9) dann eine Lösung der Differentialgleichung (3.5.2.7) ist, wenn

$$\underbrace{\omega^2 \epsilon_0 \mu_0}_{\beta_0^2} - \beta^2 = \left(\frac{m \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b} \right)^2 = \beta_c^2 \quad (3.5.2.11)$$

ist, d. h., wenn zwischen der Kreisfrequenz ω , dem Phasenmaß β und den ganzen Zahlen m und n eine feste Beziehung besteht.

Anmerkung: Die Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{H}_z}{\partial y^2} + \underbrace{(\omega^2 \epsilon_0 \mu_0 - \beta^2)}_{\beta_c^2} \cdot \underline{H}_z = 0$$

hat nur dann eine Lösung für die vorgegebenen Randbedingungen, wenn die Größe β_c^2 ganz bestimmte Werte

$$\beta_c^2 = \left(\frac{m \pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{n \pi}{b} \right)^2$$

hat. Diese Werte heißen Eigenwerte, die zugehörigen Lösungsfunktionen $\underline{H}_z(x, y, z)$ heißen Eigenfunktionen der Differentialgleichung. Es gibt

- unendlich viele zulässige Paare m, n ,
- unendlich viele Eigenwerte β_c^2 und Eigenfunktionen $\underline{H}_z(x, y, z)$ und
- unendlich viele H-Wertentypen ($H_{m,n}$ -Werte).

Phasenmaß: Aus (3.5.2.11) erhält man das Phasenmaß der Hohlleiterwellen zu

$$\beta = \sqrt{\beta_0^2 - \beta_c^2} = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} . \quad (3.5.2.12)$$

In (3.5.2.12) ist

$\beta_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$: Phasenmaß der ebenen Wellen im Vakuum bei der Kreisfrequenz ω .

$\beta_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}$: Kritische Phasenkonstante der H_{mn} -Wellen im Hohlleiter.

Wenn β_0 bis auf den Wert β_c absinkt, hört die Wellenausbreitung im Hohlleiter auf.

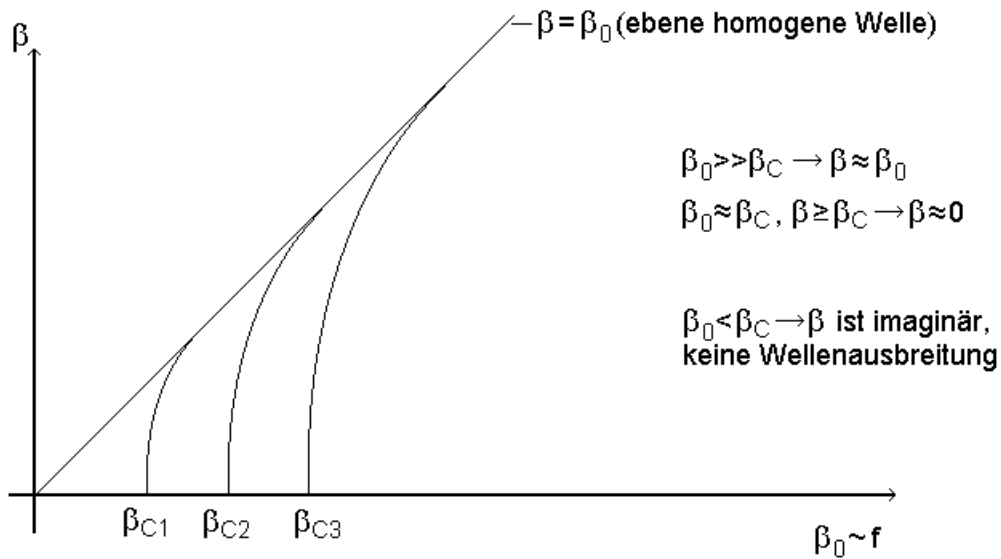
Beispiel: H_{10} -Wellen, $f = 4 \text{ GHz}$, $a = 4 \text{ cm}$, $b = 2 \text{ cm}$

$$\beta_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} = \frac{\pi}{a} = \frac{\pi}{4 \text{ cm}} \approx 0,785 \frac{1}{\text{cm}} ,$$

$$\beta_0 = 2\pi f \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{2\pi \cdot 4 \cdot 10^9}{3 \cdot 10^{10}} \frac{1}{\text{cm}} \approx 0,836 \frac{1}{\text{cm}} ,$$

$$\beta = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2} = 0,836 \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{0,785}{0,836}\right)^2} \cdot \frac{1}{\text{cm}} \approx 0,29 \frac{1}{\text{cm}} .$$

Es liegt also eine Drehung um $0,29 \text{ pro cm}$ vor (2π entspricht einer Drehung um 360°).



Kritische Frequenz (Grenzfrequenz): Jeder Wellentyp kann sich erst dann als Welle ausbreiten, wenn

$$\beta_0 > \beta_c = 2\pi f_c \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

ist. Die Frequenz

$$f_c = \frac{\beta_c}{2\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{\sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}}{2\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \quad (3.5.2.13)$$

heißt kritische Frequenz des Wellentyps.

Beispiel: $a = 4\text{ cm}$, $b = 2\text{ cm}$, H_{10} -Welle

$$f_c = \frac{\pi}{a \cdot 2\pi\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} = \frac{3 \cdot 10^{10}}{2 \cdot 4} \text{ Hz} = 3,75 \text{ GHz}.$$

Wellenlänge der Hohlleiterwelle: Aus β nach (3.5.2.12) erhält man die Hohlleiterwellenlänge

2001-12-07

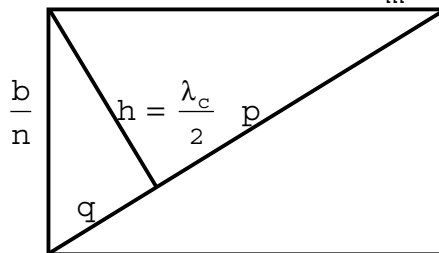
$$\lambda_z = \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{\beta_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\beta_c/\beta_0)^2}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_c)^2}} \quad (3.5.2.14)$$

Hierbei ist

λ_0 : Freiraumwellenlänge,

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\beta_c} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}} = \frac{2 \cdot \frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n}}{\sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2}} \quad (3.5.2.15)$$

Geometrische Betrachtung: $\frac{a}{m}$



$$\begin{aligned} h^2 &= p \cdot q \\ p^2 &= \left(\frac{a}{m}\right)^2 - h^2 \\ q^2 &= \left(\frac{b}{n}\right)^2 - h^2 \end{aligned}$$

$$h^2 = \sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 - h^2} \sqrt{\left(\frac{b}{n}\right)^2 - h^2}$$

$$h^4 = \left(\frac{a}{m}\right)^2 \left(\frac{b}{n}\right)^2 - h^2 \left[\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2 \right] + h^4$$

$$h = \frac{\frac{a}{m} \cdot \frac{b}{n}}{\sqrt{\left(\frac{a}{m}\right)^2 + \left(\frac{b}{n}\right)^2}} = \frac{\lambda_c}{2}$$

Anmerkung: Aus (3.5.2.14) folgt

$$\lambda_0 = \frac{\lambda_z \cdot \lambda_c}{\sqrt{\lambda_c^2 + \lambda_z^2}}$$

Phasen- und Gruppengeschwindigkeit: Gemäß (3.1.2.3) ergibt sich die Phasengeschwindigkeit in (3.5.2.12) zu

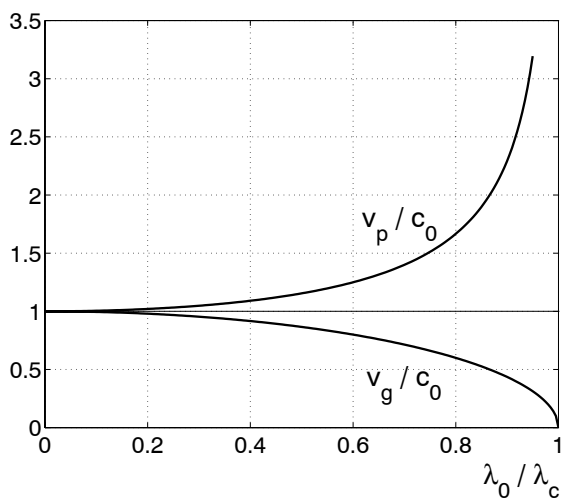
$$v_p = \frac{\omega}{\beta} = \frac{\omega}{\frac{\beta_0}{\omega\sqrt{\epsilon_0\mu_0}} \cdot \sqrt{1 - (\beta_c/\beta_0)^2}} = \frac{\frac{\omega}{\beta_0} c_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_c)^2}} \quad (3.5.2.16)$$

Gemäß (3.1.2.5) ergibt sich die Gruppengeschwindigkeit v_g (3.5.2.12) zu

$$v_g = \frac{1}{d\beta/d\omega} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \left(\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2} \right)} = \frac{1}{\frac{d}{d\omega} \sqrt{\beta_0^2 - \beta_c^2}} = \frac{1}{\frac{2\beta_0 \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}{2\sqrt{\beta_0^2 - \beta_c^2}}} =$$

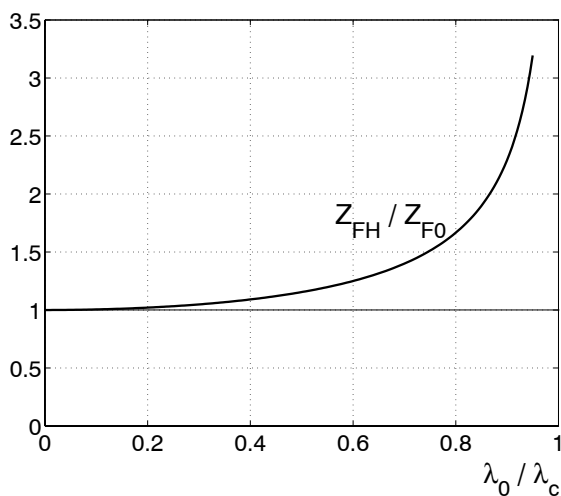
$$c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0} \right)^2} = c_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}. \quad (3.5.2.17)$$

Die von λ_0 und damit von β abhängigen Geschwindigkeiten führen zu einer Dispersion.



Feldwellenwiderstand: Mit β nach (3.5.2.12) ergibt sich der Feldwellenwiderstand aus (3.5.2.6) zu

$$Z_{FH} = \frac{\omega \mu_0}{\beta} = \frac{\omega \mu_0}{\beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}} = \frac{Z_{F0}}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_c} \right)^2}}. \quad (3.5.2.18)$$



Feldkomponenten E_x, E_y, H_y und H_x : Mit β_c^2 nach (3.5.2.11), β nach (3.5.2.12) und \underline{H}_z nach (3.5.2.9) ergeben sich diese Feldkomponenten aus (3.5.2.2) bis (3.5.2.5) zu

$$\underline{E}_x = \frac{j\omega\mu_0 \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \underline{H}_0}{\beta_c^2} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}, \quad (3.5.2.19)$$

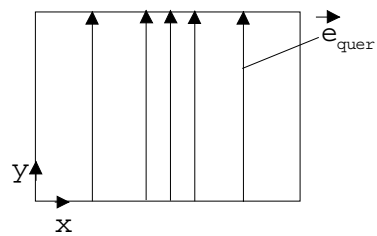
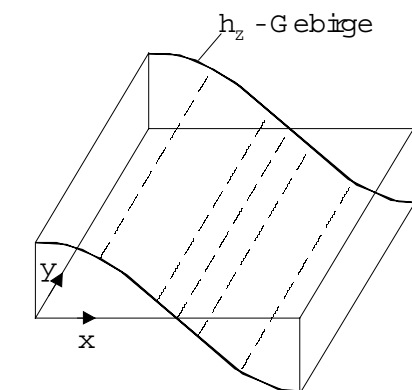
$$\underline{E}_y = -\frac{j\omega\mu_0 \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \underline{H}_0}{\beta_c^2} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}, \quad (3.5.2.20)$$

$$\underline{H}_y = \frac{\beta \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \underline{H}_0}{\beta_c^2} \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}, \quad (3.5.2.21)$$

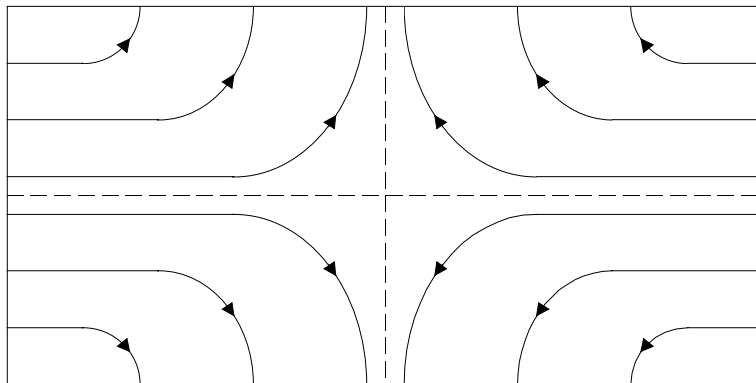
$$\underline{H}_x = \frac{\beta \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \underline{H}_0}{\beta_c^2} \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}. \quad (3.5.2.22)$$

Elektrische Feldlinien: Man kann zeigen, daß die elektrischen Feldlinien ~~sie verlaufen~~ in Querschnittebenen-Linien konstanter magnetischer Längsfeldstärke sind.

$$H_{10}\text{-Welle: } h_z \sim \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right)$$



$$H_{11}\text{-Welle: } h_z \sim \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi y}{b}\right)$$



3.5.3. E-W ellentypen (TM-W ellentypen)

2002-02-08

E-W ellentypen haben in Ausbreitungsrichtung nur eine elektrische Feldkomponente \underline{E}_z , d.h.

$$\underline{H}_z \equiv 0. \quad (3.5.3.1)$$

Der Berechnungsgang erfolgt analog zu dem der H-W ellentypen. Bei H-W ellentypen kann einer der Parameter m oder n null sein. Bei E-W ellentypen sind m und n stets ungleich null. Man erhält

$$\underline{E}_z = \underline{E}_0 \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}, \quad (3.5.3.2)$$

$$\beta_c = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2}, \quad (3.5.3.3) \quad \beta = \beta_0 \sqrt{1 - \left(\frac{\beta_c}{\beta_0}\right)^2}, \quad (3.5.3.4)$$

$$\lambda_c = \frac{2\pi}{\beta_c} = \frac{2ab}{\sqrt{(mb)^2 + (na)^2}}, \quad (3.5.3.5) \quad \lambda_z = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_c)^2}}, \quad (3.5.3.6)$$

$$v_p = \frac{c_0^2}{v_g} = \frac{c_0}{\sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_c)^2}}, \quad (3.5.3.7) \quad Z_{FE} = Z_{F0} \sqrt{1 - (\lambda_0/\lambda_c)^2}, \quad (3.5.3.8)$$

$$\underline{E}_x = -\frac{\beta}{\beta_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \underline{E}_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}, \quad (3.5.3.9)$$

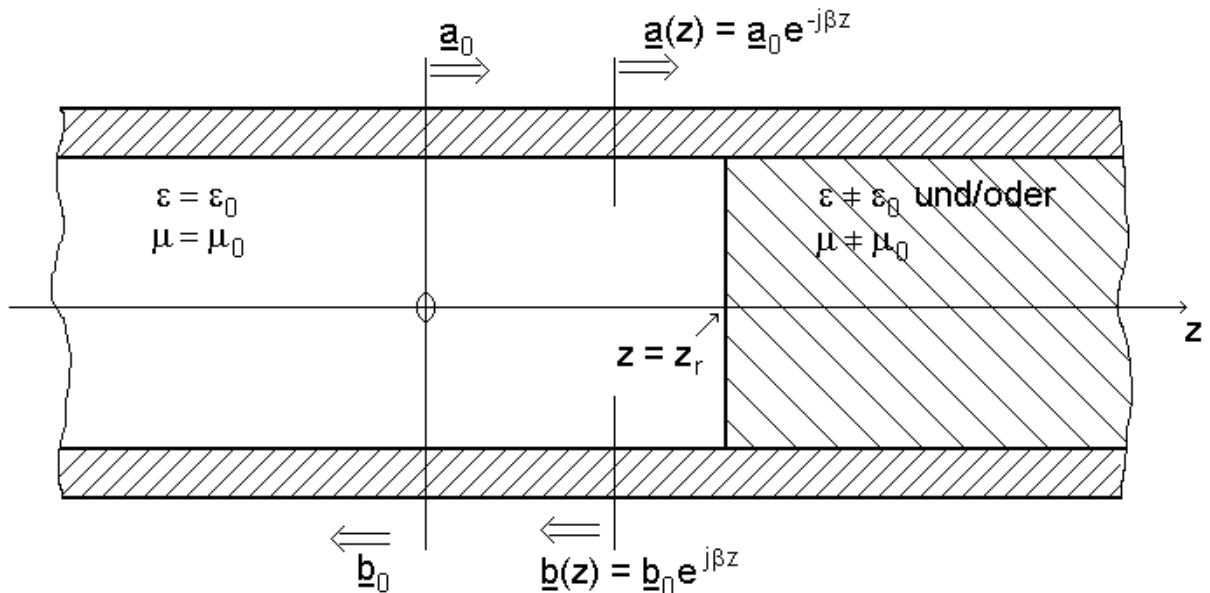
$$\underline{E}_y = -\frac{\beta}{\beta_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \underline{E}_0 \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}, \quad (3.5.3.10)$$

$$\underline{H}_x = \frac{j\omega\epsilon_0}{\beta_c^2} \cdot \frac{n\pi}{b} \cdot \underline{E}_0 \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \cos\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}, \quad (3.5.3.11)$$

$$\underline{H}_y = -\frac{j\omega\epsilon_0}{\beta_c^2} \cdot \frac{m\pi}{a} \cdot \underline{E}_0 \cdot \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y}{b}\right) \cdot e^{-\beta z}. \quad (3.5.3.12)$$

4.1. Reflexion

4.1.1. Hinlaufende und reflektierte Welle



Es wird ein verlustfreier Wellenleiter, z.B. ein Hohlleiter, betrachtet, der in Bereich $z \leq z_r$ leer ist, und der in Bereich $z > z_r$ mit einem Dielektrikum ausgefüllt ist. In folgenden wird der leere Bereich $z \leq z_r$ betrachtet.

Von einem Generator werde eine Welle in Richtung wachsender z geschickt, die hinlaufende Welle. Diese Welle habe bei $z=0$ die komplexe Wellenamplitude

$$\underline{a}_0 = \underline{a}(z)|_{z=0} = \underline{a}(0). \tag{4.1.1.1}$$

Mit \underline{a}_0 nach (4.1.1.1) ergibt sich die komplexe Wellenamplitude der hinlaufenden Welle in Bereich $z \leq z_r$ abhängig von z zu

$$\underline{a}(z) = \underline{a}_0 \cdot e^{-j\beta z}. \tag{4.1.1.2}$$

Durch die Inhomogenität bei $z = z_r$ wird die hinlaufende Welle teilweise reflektiert.

Die reflektierte Welle hat bei $z=0$ die komplexe Wellenamplitude

$$\underline{b}_0 = \underline{b}(z)|_{z=0} = \underline{b}(0). \quad (4.1.1.3)$$

Mit \underline{b}_0 nach (4.1.1.3) ergibt sich die komplexe Wellenamplitude der reflektierten Welle - diese existiert nur im Bereich $z \leq z_r$ - zu

$$\underline{b}(z) = \underline{b}_0 \cdot e^{\beta z}. \quad (4.1.1.4)$$

Wenn die Reflexionsstelle bei $z=z_r$ nicht verstärkt, und dies sein folgendes vorausgesetzt, ist

$$|\underline{b}_0| \leq |\underline{a}_0|. \quad (4.1.1.5)$$

Das Dielektrum des Wellenleiters ist inhomogen, weil ϵ und/oder μ ortsabhängig sind. Unter Umständen entsteht trotz des inhomogenen Dielektrikums keine reflektierte Welle. Dann ist der Wellenleiterbereich $z \leq z_r$ bei $z=z_r$ angepaßt abgeschlossen.

Entsteht dagegen eine reflektierte Welle, so ist der Wellenleiterbereich $z \leq z_r$ bei $z=z_r$ nicht angepaßt abgeschlossen oder fehlangepaßt.

4.1.2. Reflexionsfaktor, Anpassungsfaktor, Welligkeitsfaktor

2001-12-14

Im folgenden wird der Bereich $z \leq z_r$ betrachtet.

Reflexionsfaktor r : Die Größe

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{b}(z)}{\underline{a}(z)} \quad (4.1.2.1)$$

heißt Reflexionsfaktor. Der Reflexionsfaktor bei $z=0$ ist

$$\underline{r}_0 = \frac{\underline{b}_0}{\underline{a}_0} . \quad (4.1.2.2)$$

Es gilt

$$\underline{r}(z) = \frac{\underline{b}_0 \cdot e^{\beta z}}{\underline{a}_0 \cdot e^{-\beta z}} = \underline{r}_0 \cdot e^{2\beta z} . \quad (4.1.2.3)$$

(4.1.2.3) zeigt, daß $\underline{r}(z)$ ebenso wie $\underline{a}(z)$ und $\underline{b}(z)$ periodisch mit z fluktuiert. Bei $\underline{r}(z)$ ist die örtliche Periodenlänge jedoch nur halb so groß wie bei $\underline{a}(z)$ und $\underline{b}(z)$.

Der Betrag $|\underline{r}(z)|$ von $\underline{r}(z)$ ist wegen der Verlustfreiheit des Wellenleiters unabhängig von z , d.h.

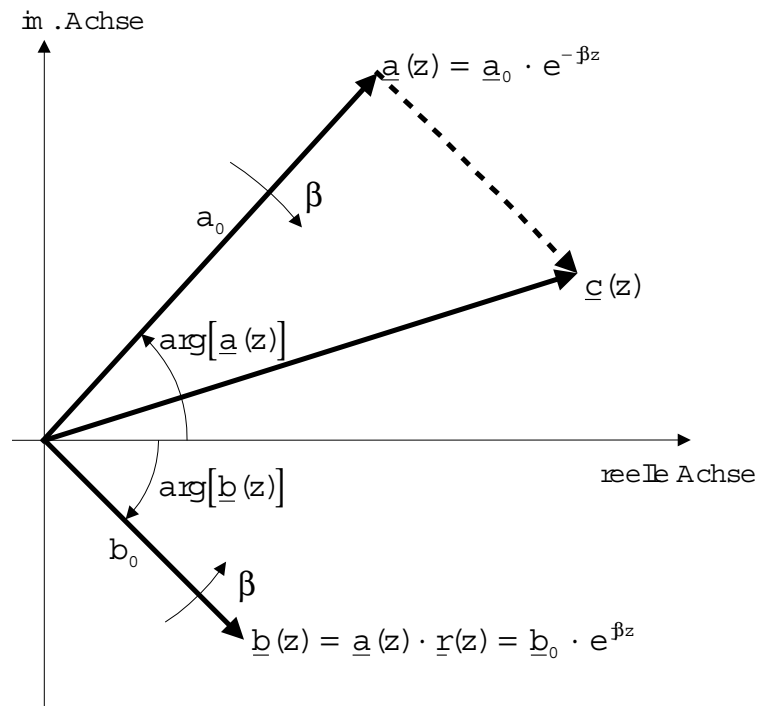
$$r = |\underline{r}(z)| = |\underline{r}_0| = r_0 . \quad (4.1.2.4)$$

Lediglich das Argument $\arg[\underline{r}(z)]$ hängt von z ab. Bemerkenswert ist, daß auf der rechten Seite von (4.1.2.3) im Exponenten nicht β , sondern 2β auftritt (siehe auch obige Bemerkung zur periodischen Fluktuation).

Anpassungsfaktor: Die resultierende komplexe Wellenamplitude ist

2001-12-07

$$\underline{c}(z) = \underbrace{\underline{a}(z)}_{\substack{\text{hinlaufende} \\ \text{Welle}}} + \underbrace{\underline{b}(z)}_{\substack{\text{reflektierte} \\ \text{Welle}}} = \underline{a}(z) \cdot [1 + \underline{r}(z)]. \quad (4.1.2.5)$$



Die Zeiger $\underline{a}(z)$ und $\underline{b}(z)$ drehen mit wachsendem z mit der Winkelgeschwindigkeit β gegen den bzw. im Uhrzeigersinn.

$$|\underline{c}(z)|_{\text{min}} = a_0 (1 - r), \quad (4.1.2.6)$$

$$|\underline{c}(z)|_{\text{max}} = a_0 (1 + r). \quad (4.1.2.7)$$

Der Quotient

$$m = \frac{|\underline{c}(z)|_{\text{min}}}{|\underline{c}(z)|_{\text{max}}} = \frac{a_0 (1 - r)}{a_0 (1 + r)} = \frac{1 - r}{1 + r} \quad (4.1.2.8)$$

heißt Anpassungsfaktor. Es gilt

$$\underbrace{0}_{\text{Totalreflexion}} \leq m \leq \underbrace{1}_{\text{perfekte Anpassung}}. \quad (4.1.2.9)$$

Wellenfaktor: Der Reziprokwert

$$s = \frac{1}{m} \quad (4.1.2.10)$$

von m heißt Wellenfaktor (SWR = standing wave ratio, VSWR = voltage standing wave ratio). Es ist

$$\underbrace{1}_{\text{perfekte Anpassung}} \leq s \leq \underbrace{\infty}_{\text{Totale Reflexion}}. \quad (4.1.2.11)$$

Aus (4.1.2.8) folgt

$$r = \frac{1-m}{1+m} = r_0. \quad (4.1.2.12)$$

Aus (4.1.2.12) folgt

$$m = \frac{1-r}{1+r} = \frac{1-r_0}{1+r_0}. \quad (4.1.2.13)$$

4.1.3. Resultierende komplexe Wellenamplitude

2001-01-16

Es werde die normierte komplexe Wellenamplitude betrachtet:

$$\underline{c}'(z) = \frac{\underline{c}(z)}{|\underline{c}(z)|_{\max} \cdot \exp[j \cdot \arg(\underline{c}(0))]} = \frac{\underline{a}(z)[1 + \underline{r}(z)]}{a(0)[1 + r(0)] \cdot \frac{\underline{c}(0)}{c(0)}} =$$

$$\frac{\underline{a}(0) \cdot e^{-\beta z} \cdot [1 + \underline{r}(z)]}{a(0)[1 + r(0)] \cdot \frac{\underline{c}(0)}{c(0)}} = \frac{\underline{a}(0) \cdot e^{-\beta z} \cdot [1 + \underline{r}(z)]}{a(0)[1 + r(0)] \cdot \frac{\underline{a}(0)[1 + \underline{r}(0)]}{a(0)[1 + r(0)]}} =$$

$$e^{-\beta z} \cdot \frac{[1 + \underline{r}(z)]}{1 + r_0} \cdot e^{-j \arg[1 + r(0)]}.$$

(4.1.3.1)

Die Normierung bedeutet,

- daß man auf den Maximalbetrag von $\underline{c}(z)$ bezieht, d.h., daß $|\underline{c}'(z)|_{\max} = 1$ wird, und
- daß $\underline{c}'(0)$ reell und nichtnegativ wird.

Zunächst sei r_0 rein reell und nichtnegativ:

$$r_0 = \frac{b_0}{a_0} = |r_0| = r_0 \geq 0.$$

(4.1.3.2)

Falls keine Verstärkung beider Reflexion auftritt, folgt zusätzlich, daß $r_0 \leq 1$ ist.

$$|c'(z)| = c'(z) = \underbrace{e^{-\beta z}}_{=1} \cdot \frac{\overbrace{|1+r(z)|}^{=|1+r_0 \cdot e^{2\beta z}|}}{1+r_0} \cdot \underbrace{e^{-j \arg[1+r_0]}}_{=1} =$$

$$\frac{1}{1+r_0} \cdot \sqrt{[1+r_0 \cdot \cos(2\beta z)]^2 + r_0^2 \cdot \sin^2(2\beta z)} = \frac{1}{1+r_0} \cdot \sqrt{1+r_0^2 + 2r_0 \cos(2\beta z)} =$$

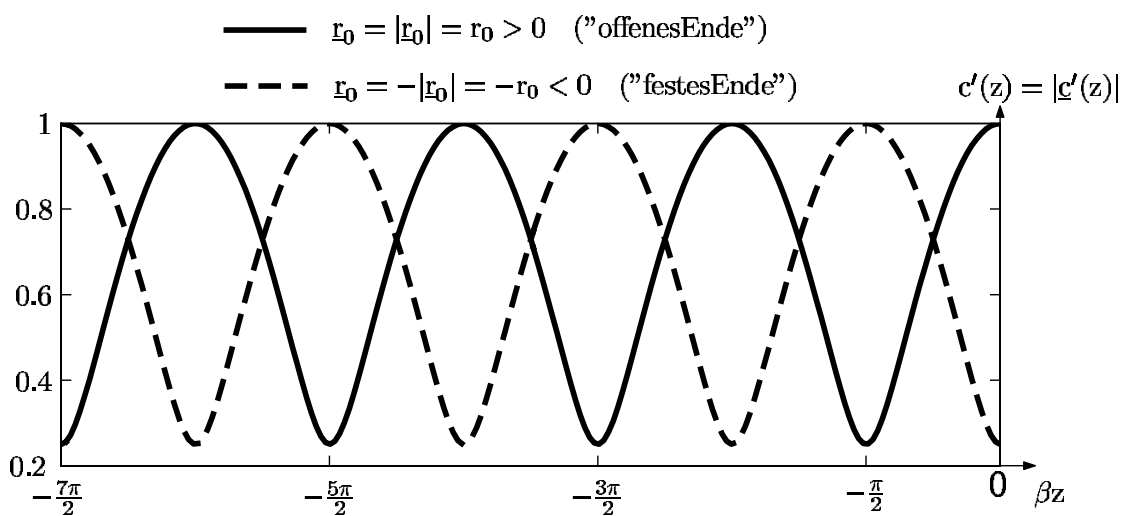
$$\frac{1}{1+r_0} \cdot \sqrt{1+r_0^2 - 2r_0 \cdot 2(\sin^2(\beta z) - \frac{1}{2})} = \frac{1}{1+r_0} \cdot \sqrt{1+r_0^2 + 2r_0 - 4r_0 \sin^2(\beta z)} =$$

$$\sqrt{1 - \frac{4r_0}{(1+r_0)^2} \cdot \sin^2(\beta z)} = |c'(z)| \quad .$$

(4.1.3.3)

Mit (4.1.2.13) folgt aus (4.1.3.3)

$$c'(z) = \sqrt{1 - \frac{4 \cdot \frac{1-m}{1+m}}{\left(1 + \frac{1-m}{1+m}\right)^2} \cdot \sin^2(\beta z)} = \sqrt{1 + \underbrace{(m^2 - 1)}_{\leq 0} \sin^2(\beta z)} \quad . \quad (4.1.3.4)$$

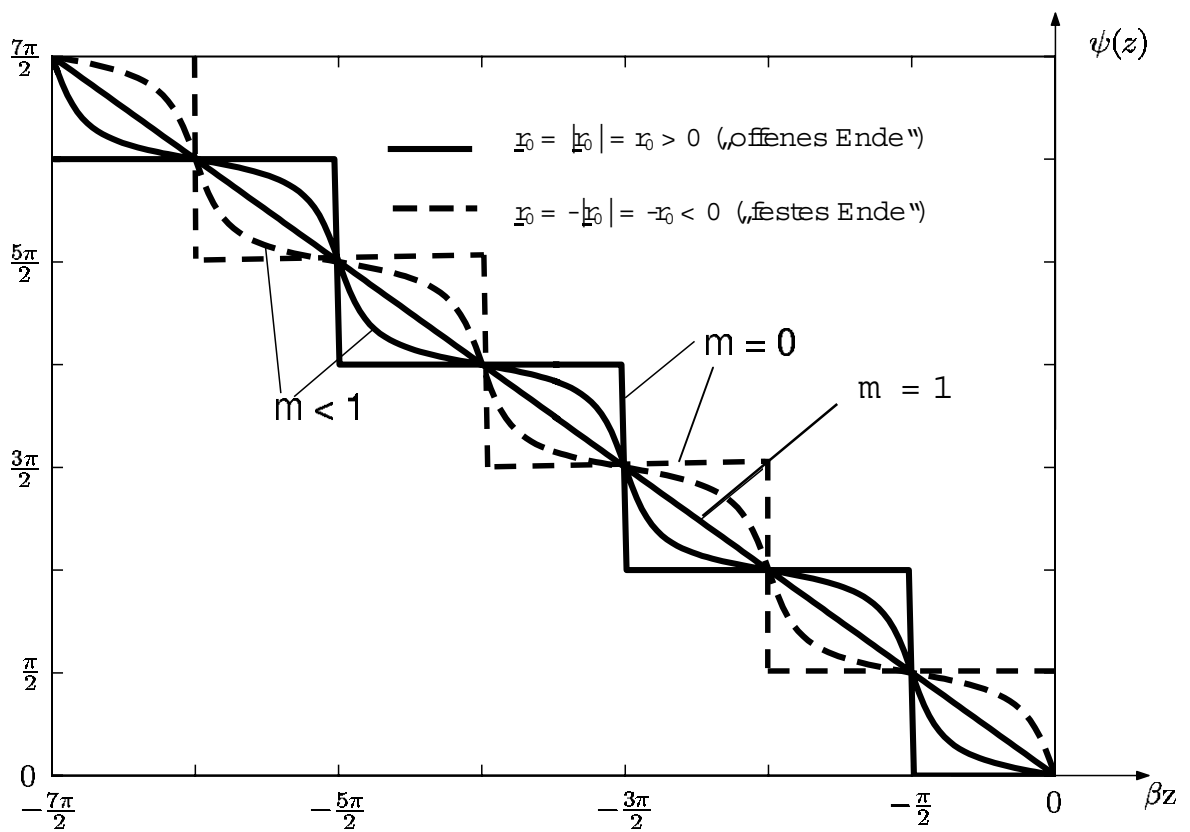


$$\psi(z) = \arg\{c'(z)\} = \arg\{e^{-\beta z} \cdot [1 + \underline{r}(z)]\} = \arg\left\{e^{-\beta z} \cdot \left[1 + \underbrace{\underline{r}(0)}_{\underline{r}_0 \geq 0} \cdot e^{\beta z}\right]\right\} =$$

$$\arg\{e^{-\beta z} + \underline{r}_0 \cdot e^{\beta z}\} = \arctan\left[\frac{-\sin(\beta z) + \underline{r}_0 \cdot \sin(\beta z)}{\cos(\beta z) + \underline{r}_0 \cdot \cos(\beta z)}\right] =$$

$$\arctan\left[\frac{\underline{r}_0 - 1}{\underline{r}_0 + 1} \cdot \tan(\beta z)\right] = -\arctan[m \cdot \tan(\beta z)] = \psi(z).$$

(4.1.3.5)



Jetzt sei

$$\underline{r}_0 = \frac{\underline{b}_0}{\underline{a}_0} = -|\underline{r}_0| = -r_0 \leq 0 \quad (\text{reell, nichtpositiv}).$$

(4.1.3.6)

Betrag von $c'(z)$: Aus (4.1.3.1) folgt mit (4.1.3.6) und (4.1.2.3)

2003-01-17

$$\begin{aligned} |c'(z)| = c'(z) &= \frac{|1 - r_0 \cdot e^{j\beta z}|}{1 + r_0} = \frac{1}{1 + r_0} \cdot \sqrt{[1 - r_0 \cdot \cos(2\beta z)]^2 + r_0^2 \cdot \sin^2(2\beta z)} = \\ &= \frac{1}{1 + r_0} \cdot \sqrt{1 + r_0^2 - 2r_0 \cos(2\beta z)} = \frac{1}{1 + r_0} \cdot \sqrt{1 + r_0^2 - 2r_0 \cdot 2(\cos^2(\beta z) - \frac{1}{2})} = \\ &= \frac{1}{1 + r_0} \cdot \sqrt{1 + r_0^2 + 2r_0 - 4r_0 \cos^2(\beta z)} = \sqrt{1 - \frac{4r_0}{(1 + r_0)^2} \cdot \cos^2(\beta z)} = |c'(z)| \quad . \end{aligned}$$

(4.1.3.7)

Mit (4.1.2.13) folgt aus (4.1.3.7)

$$c'(z) = \sqrt{1 + (m^2 - 1) \cdot \cos^2(\beta z)} \quad .$$

(4.1.3.8)

Argument von $c'(z)$: Aus (4.1.3.1) folgt mit (4.1.3.6), (4.1.2.3) und (4.1.2.13)

$$\begin{aligned} \psi(z) = \arg\{c'(z)\} &= \arg\{e^{-j\beta z} - r_0 \cdot e^{j\beta z}\} = \arctan\left[\frac{-\sin(\beta z) - r_0 \cdot \sin(\beta z)}{\cos(\beta z) - r_0 \cdot \cos(\beta z)}\right] = \\ &= \arctan\left[-\frac{1 + r_0}{1 - r_0} \cdot \tan(\beta z)\right] = -\arctan\left[\frac{1}{m} \cdot \tan(\beta z)\right] = \psi(z) \quad . \end{aligned}$$

(4.1.3.9)

Anmerkung: Die Kurven $c'(z)$ bzw. $\psi(z)$ für unterschiedliche r_0 gleichen Betrags $|r_0| = r_0$ können durch Parallelverschiebung ineinander übergeführt werden. Dies folgt aus der Periodizität des Reflexionsfaktors, siehe (4.1.2.3). Die Kurven $c'(z)$ sind längs der z-Achse, die Kurven $\psi(z)$ längs der „Winkelhabierenden“ zu verschieben.

4.2.1. Feldwellenwiderstand, Wellenwiderstand

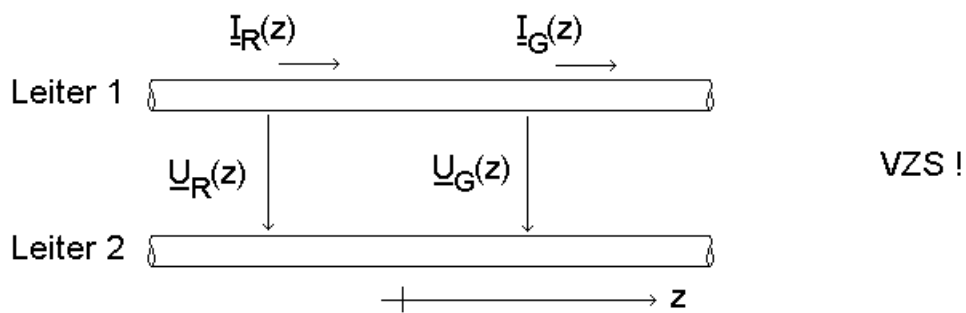
Die in Richtung wachsender z wandernde Welle wird mit dem Index G (von Generator kommend), die in Richtung abnehmender z wandernde Welle wird mit dem Index R (reflektierte Welle) gekennzeichnet.

$$\frac{\underline{E}_{x_1 G}}{\underline{H}_{x_2 G}} = -\frac{\underline{E}_{x_2 G}}{\underline{H}_{x_1 G}} = \begin{cases} Z_{F_0} & (\text{TEM - Wellen}), \text{ siehe (3.3.1.10)}, \\ Z_{F_H} & (\text{TE - Wellen}), \text{ siehe (3.5.2.18)}, \\ Z_{F_E} & (\text{TM - Wellen}), \text{ siehe (3.5.3.8)}. \end{cases} \quad (4.2.1.1)$$

Für die reflektierte Welle gilt, da deren Poyntingvektor in Richtung abnehmender z weist, d.h. $\vec{P}_z^* \leq 0$,

$$\frac{\underline{E}_{x_1 R}}{\underline{H}_{x_2 R}} = -\frac{\underline{E}_{x_2 R}}{\underline{H}_{x_1 R}} = \begin{cases} -Z_{F_0} & (\text{TEM - Wellen}), \\ -Z_{F_H} & (\text{TE - Wellen}), \\ -Z_{F_E} & (\text{TM - Wellen}). \end{cases} \quad (4.2.1.2)$$

Bei TEM-Wellen auf Zweileitersystemen folgt bei Voraussetzung des Verbraucherzählpfeilsystems für hin- und rücklaufende Welle mit (3.4.2.5) aus (4.2.1.1) und (4.2.1.2)



$$\frac{\underline{U}_G(z)}{\underline{I}_G(z)} = -\frac{\underline{U}_R(z)}{\underline{I}_R(z)} = Z_L. \quad (4.2.1.3)$$

4.2.2. Repräsentative Feldgrößen

2001-12-14

Als Reflexionsfaktoren können folgende vier Größen eingeführt werden:

$$\underline{r}_1 = \frac{\underline{E}_{x_1 R}}{\underline{E}_{x_1 G}}, \quad (4.2.2.1)$$

$$\underline{r}_2 = \frac{\underline{E}_{x_2 R}}{\underline{E}_{x_2 G}}, \quad (4.2.2.2)$$

$$\underline{r}_3 = \frac{\underline{H}_{x_1 R}}{\underline{H}_{x_1 G}}, \quad (4.2.2.3)$$

$$\underline{r}_4 = \frac{\underline{H}_{x_2 R}}{\underline{H}_{x_2 G}}. \quad (4.2.2.4)$$

Es ist

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_2, \quad (4.2.2.5)$$

$$\underline{r}_3 = \underline{r}_4. \quad (4.2.2.6)$$

Weiterhin folgt mit (4.2.1.1) und (4.2.1.2)

$$\frac{\underline{E}_{x_1 G}}{\underline{H}_{x_2 G}} = -\frac{\underline{E}_{x_1 R}}{\underline{H}_{x_2 R}}, \text{ dh.}$$

$$\frac{\underline{E}_{x_1 R}}{\underline{E}_{x_1 G}} = -\frac{\underline{H}_{x_2 R}}{\underline{H}_{x_2 G}}, \text{ dh.}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=\underline{r}_1} \qquad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=\underline{r}_4}$

$$\underline{r}_1 = \underline{r}_2 = -\underline{r}_3 = -\underline{r}_4. \quad (4.2.2.7)$$

Im folgenden wird der Reflexionsfaktor \underline{r}_1 benutzt, der das elektrische Feld bzw. die Spannung betrifft. Es wird also

$$\underline{r} = \underline{r}_1 = \frac{\underline{E}_{\text{tr}R}}{\underline{E}_{\text{tr}G}} = -\frac{\underline{H}_{\text{tr}R}}{\underline{H}_{\text{tr}G}} \quad (4.2.2.8)$$

gesetzt.

4.2.3. Resultierende Impedanz

2001-12-07

Resultierende Wellenimpedanz: Anstelle der Feldwellenwellenlängen Z_{F0} , Z_{FH} bzw. Z_{FE} wird einheitlich Z_F geschrieben. Für die resultierende Wellenimpedanz erhält man mit (4.2.2.4)

$$Z(z) = \frac{\underline{E}_{x_1G} + \underline{E}_{x_1R}}{\underline{H}_{x_2G} + \underline{H}_{x_2R}} = -\frac{\underline{E}_{x_2G} + \underline{E}_{x_2R}}{\underline{H}_{x_1G} + \underline{H}_{x_1R}} = \frac{\underline{E}_{x_1G} \cdot [1 + \underline{r}(z)]}{\underline{H}_{x_2G} \cdot [1 - \underline{r}(z)]} = Z_F \cdot \frac{1 + \underline{r}_0 \cdot e^{j\beta z}}{1 - \underline{r}_0 \cdot e^{j\beta z}}.$$

Somit ergibt sich die normierte Wellenimpedanz zu

$$Z'(z) = \frac{Z(z)}{Z_F} = \frac{1 + \underline{r}_0 \cdot e^{j\beta z}}{1 - \underline{r}_0 \cdot e^{j\beta z}}. \quad (4.2.3.1)$$

Resultierende Leitungsimpedanz: Für die Impedanz von TEM-Wellen gilt

$$Z'(z) = \frac{Z(z)}{Z_L} = \frac{1 + \underline{r}_0 \cdot e^{j\beta z}}{1 - \underline{r}_0 \cdot e^{j\beta z}}. \quad (4.2.3.2)$$

Elimination von \underline{r}_0 : Bei $z=0$ ist

$$Z'(0) = \frac{1 + \underline{r}_0}{1 - \underline{r}_0} = Z_0'. \quad (4.2.3.3)$$

Aus (4.2.3.3) folgt

$$\underline{r}_0 = \frac{Z_0' - 1}{Z_0' + 1}. \quad (4.2.3.4)$$

Mit (4.2.3.4) folgt aus (4.2.3.1)

$$Z'(z) = Z_0' \cdot \frac{1 - \frac{j}{Z_0'} \cdot \tan(\beta z)}{1 - j \cdot Z_0' \cdot \tan(\beta z)}. \quad (4.2.3.5)$$

4.2.4. Kreisdiagramm bei reellem Reflexionsfaktor $\underline{r}_0 = -r_0$

2001-12-14

Reeller Reflexionsfaktor r_0 : Es sei

$$\underline{r}_0 = -r_0 = \frac{\vec{E}_R}{\vec{E}_G} \quad (\text{"festes Ende"}). \quad (4.2.4.1)$$

Damit folgt aus $Z'(z)$ nach (4.2.3.2) mit (4.1.2.3) und (4.1.2.13)

$$Z'(z) = \frac{Z(z)}{Z_F} = \frac{1 - r_0 \cdot e^{j\beta z}}{1 + r_0 \cdot e^{j\beta z}} = \frac{e^{-j\beta z} - r_0 \cdot e^{j\beta z}}{e^{-j\beta z} + r_0 \cdot e^{j\beta z}} =$$

$$\frac{\cos(\beta z) - j \sin(\beta z) - r_0 \cos(\beta z) - j r_0 \sin(\beta z)}{\cos(\beta z) - j \sin(\beta z) + r_0 \cos(\beta z) + j r_0 \sin(\beta z)} = \frac{1 - r_0 - j(1 + r_0) \tan(\beta z)}{1 + r_0 - j(1 - r_0) \tan(\beta z)} =$$

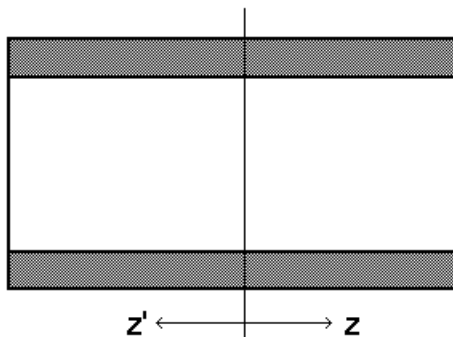
$$\frac{\frac{1 - r_0}{1 + r_0} - j \tan(\beta z)}{1 - j \frac{1 - r_0}{1 + r_0} \tan(\beta z)} = \frac{m - j \tan(\beta z)}{1 - j n \cdot \tan(\beta z)}.$$

(4.2.4.2)

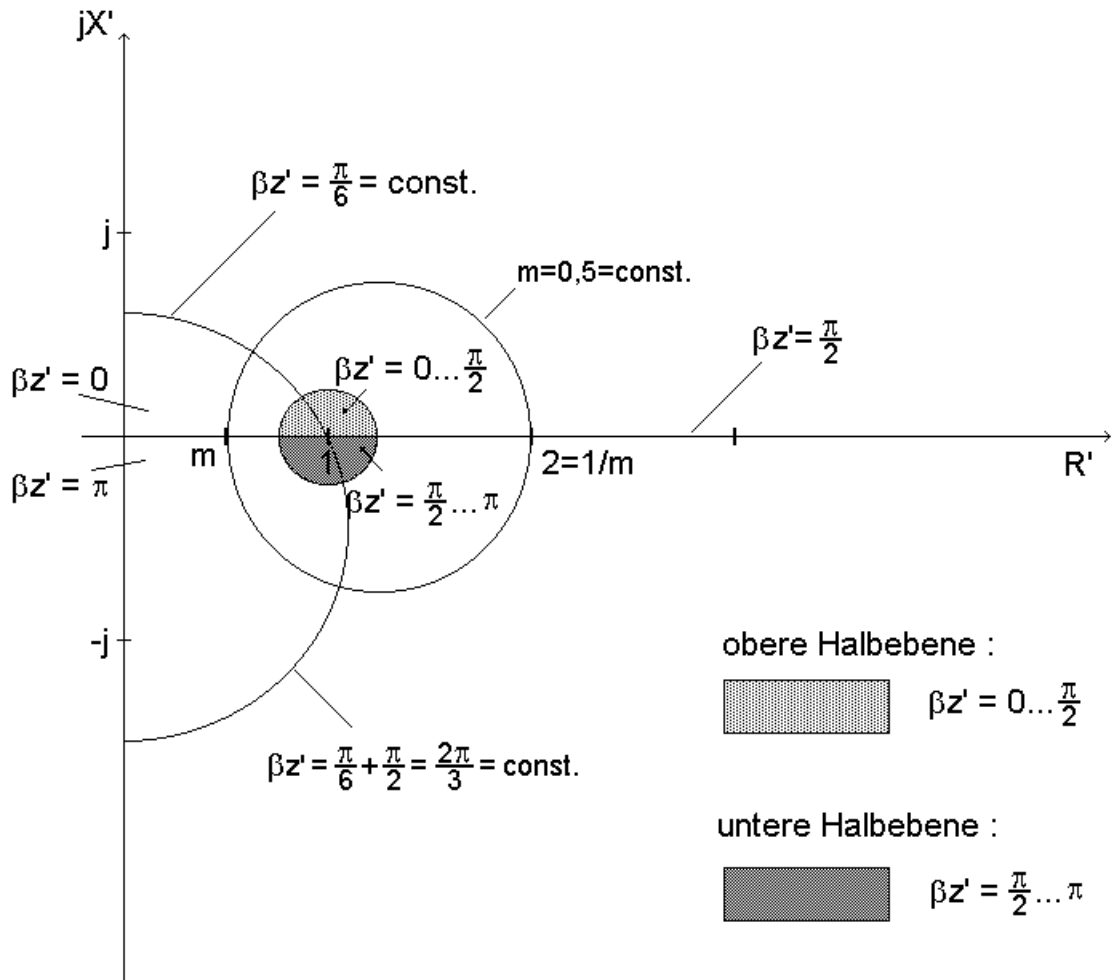
Änderung der Längskoordinate:

$$z' = -z$$

(4.2.4.3)



Beispiel: $m = 0,5$, $\frac{1}{2}(\frac{1}{m} - m) = 0,75$ (Radius), $\frac{1}{2}(\frac{1}{m} + m) = 1,25$ (Mittelpunkt)



Kreise $\beta z' = \text{const.}$:

2001-12-07

$$R'^2 + [X + \cot(2\beta z')]^2 = \left[\frac{1}{\sin(2\beta z')} \right]^2. \quad (4.2.4.6)$$

$Z'(m)$ liegt also auf einem Kreis mit dem Radius $1/|\sin(2\beta z')|$, dessen Mittelpunkt auf der imaginären Achse bei $-\cot(2\beta z')$ liegt. Die Lage von $Z'(m)$ auf dem Kreis hängt von m ab. Alle Kreise $\beta z' = \text{const.}$ gehen durch den Punkt der reellen Achse. Dies folgt aus (4.2.4.6), wenn man $R' = 1$ und $X = 0$ setzt:

$$1 + [0 + \cot(2\beta z')]^2 = \left[\frac{1}{\sin(2\beta z')} \right]^2.$$

Beispiel: $\beta z' = \pi/6 = 30^\circ$

$$\cot(2\beta z') = \cot(60^\circ) = 0,58 \quad ,$$

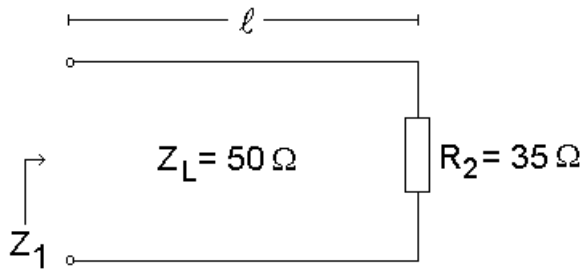
$$\sin(2\beta z') = \sin(60^\circ) = 0,87 \quad ,$$

$$\frac{1}{\sin(2\beta z')} = 1,15 \quad (\text{Radius}) \quad ,$$

$$-\cot(2\beta z') = -0,58 \quad (\text{Mittelpunkt}) \quad .$$

Anwendungsbeispiel:

2003-01-24



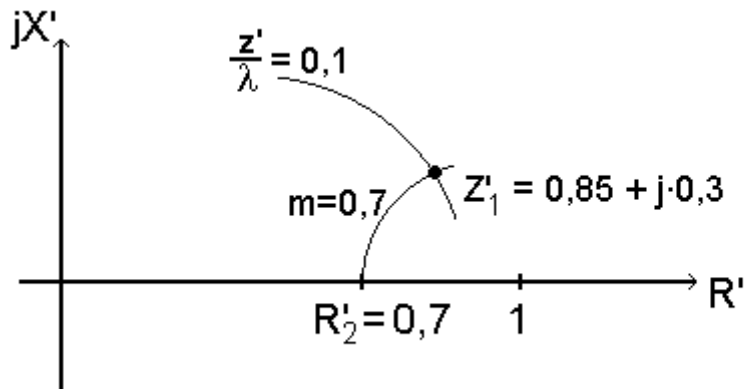
$$l/\lambda = 0,1, \beta l = 2\pi l/\lambda = 0,2\pi = 36^\circ,$$

gem äß (4.2.3.4)

$$\Gamma_0 = \frac{\frac{R_2}{Z_L} - 1}{\frac{R_2}{Z_L} + 1} = \frac{Z_0 - 1}{Z_0 + 1} = -\frac{3}{17} = -\Gamma_0,$$

gem äß (4.1.2.13)

$$m = \frac{1 - \Gamma_0}{1 + \Gamma_0} = \frac{1 - \frac{3}{17}}{1 + \frac{3}{17}} = \frac{14}{20} = 0,7.$$



$$Z_1 = Z'_1 \cdot Z_L = (0,85 + j \cdot 0,3) \cdot 50 \Omega = (42,5 + j \cdot 15) \Omega.$$

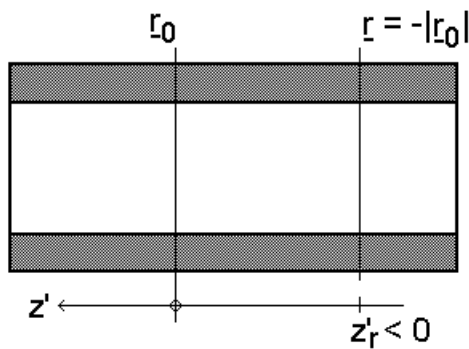
4.2.5. Kreisdiagramm bei komplexem Reflexionsfaktor \underline{r}_0

2001-12-14

Jeder komplexe Reflexionsfaktor \underline{r}_0 kann aufgefaßt werden als „Ergebnis“ eines reellen Reflexionsfaktors

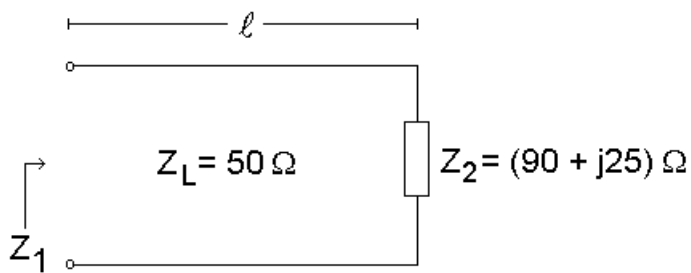
$$\underline{r} = -|\underline{r}_0|$$

an einer entsprechend gewählten Stelle $z_r' < 0$:



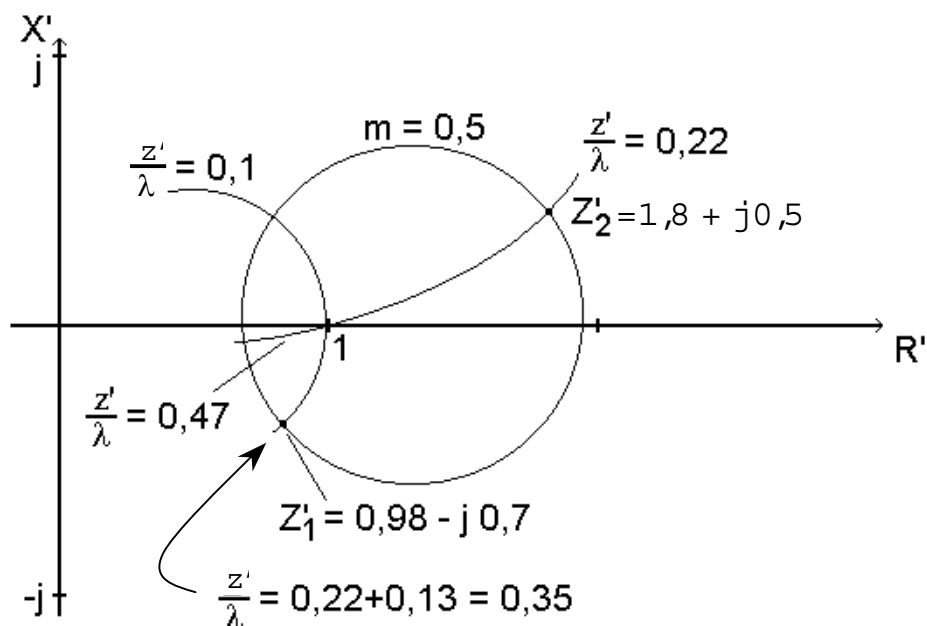
$$r = -|\underline{r}_0| \cdot e^{-j\beta z_r'}$$

Beispiel:



$$\frac{l}{\lambda} = 0,13 \rightarrow \beta l = \frac{2\pi l}{\lambda} = 0,26\pi$$

$$Z_L' = 1, \quad Z_2' = \frac{Z_2}{Z_L} = 1,8 + j \cdot 0,5$$



$$Z_1 = Z_L \cdot Z_1' = 50 \Omega \cdot (0,98 - j \cdot 0,7) = (49 - j \cdot 35) \Omega .$$

Anmerkungen:

- 1) Im Kreisdiagramm benötigt man nur Werte z'/λ mod 0,5
- 2) Beim Durchlaufen des Punktes $Z'=1$ ändert sich der Parameter der Kreise $z'/\lambda = \text{const.}$ um 0,25.
- 3) Y' und $Z'=1/Y'$ liegen auf dem selben Kreis $m = \text{const.}$, jedoch auf unterschiedlichen Zweigen des Kreises $\beta z' = \text{const.}$

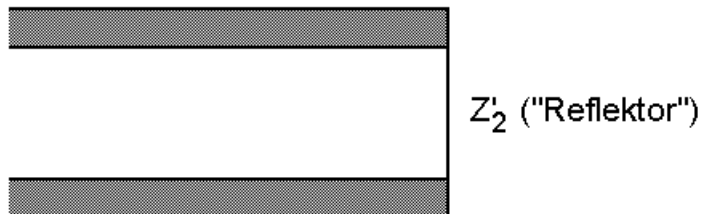
In obigem Beispiel:

$$Y_1' = \frac{1}{Z_1'} = 0,68 + j \cdot 0,48 \rightarrow Y_1 = \frac{1}{Z_1} = \frac{1}{50 \Omega} (0,68 + j \cdot 0,48) = (13,6 + j \cdot 9,6) \text{ mS} .$$

4.2.6. Kreis konstanter Wirkleistung

2001-12-14

Die Kreise $m = \text{const.}$ sind gleichzeitig Kreise $|r| = \text{const.}$, siehe (4.1.2.13). Alle Impedanzen Z_2' auf dem selben Kreis $m = \text{const.}$ erzeugen auf dem Wellenleiter komplexe Reflexionsfaktoren desselben Betrags $|r|$.



Für alle diese Impedanzen ist somit, siehe (4.1.2.1), bei gegebenem $|a(z)|$

$$|b(z)| = r|a(z)|. \quad (4.2.6.1)$$

Die dem „Reflektor“ zugeführte Wirkleistung ist, siehe (3.1.3.2),

$$P_W = \frac{1}{2} \left[|a(z)|^2 - |b(z)|^2 \right] = \frac{1}{2} |a(z)|^2 \cdot (1 - r^2). \quad (4.2.6.2)$$

Bei gegebenem $|a(z)|$ ist somit P für alle Abschlußimpedanzen auf dem Kreis $m = \text{const.}$ gleich.

Die maximale Wirkleistung ergibt sich für $r=0$ zu

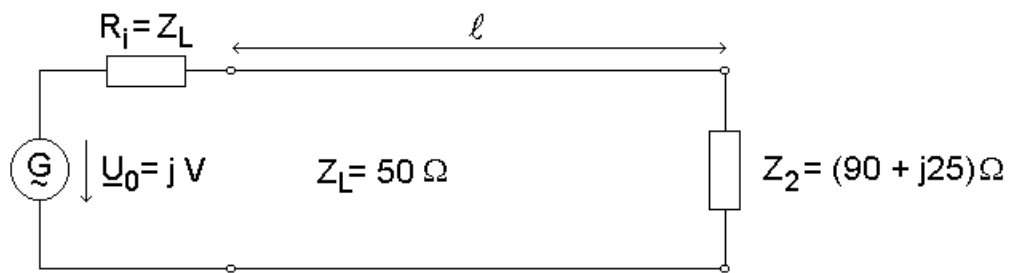
$$P_{W \text{ max}} = \frac{1}{2} |a(z)|^2. \quad (4.2.6.3)$$

Aus (4.2.6.2) und (4.2.6.3) folgt

$$\frac{P_W}{P_{W \text{ max}}} = \frac{\frac{1}{2} |a(z)|^2 \cdot (1 - r^2)}{\frac{1}{2} |a(z)|^2} = 1 - r^2 = 1 - \left(\frac{1 - m}{1 + m} \right)^2 = \frac{4m}{(1 + m)^2}. \quad (4.2.6.4)$$

Beispiel:

2001-12-07



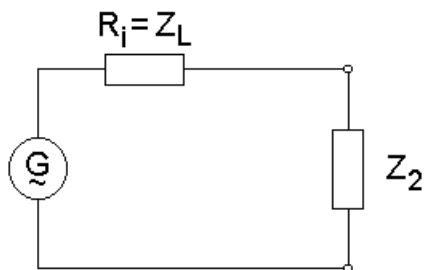
$$Z'_2 = \frac{Z_2}{Z_L} = 1,8 + j \cdot 0,5 \rightarrow m = 0,5 \quad ,$$

$$\frac{P_W}{P_{W \max}} = \frac{4 \cdot 0,5}{(1 + 0,5)^2} = 0,888 \dots \quad ,$$

$$P_{W \max} = \frac{U_0^2}{8R_i} = \frac{1 \text{ W}}{8 \cdot 50} = 2,5 \text{ mW} \quad ,$$

$$P_W = 2,5 \cdot 0,888 \text{ mW} = 2,22 \text{ mW} \quad .$$

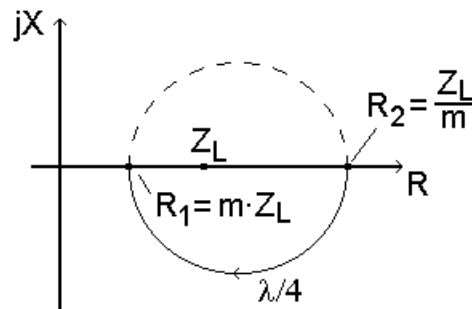
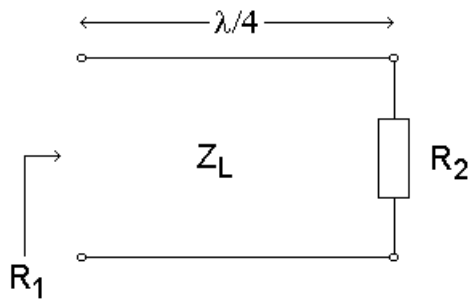
Anmerkung: In obigem Beispiel kann man die Leitungslänge $\ell=0$ wählen, weil $R_i=Z_L$ durch die Leitung nicht verändert wird.



4.2.7. Beispiele von Transformationsschaltungen

2001-12-14

$\lambda/4$ -Transformator: Transformation einer reellen Impedanz $Z_2=R_2$ in eine reelle Impedanz $Z_1=R_1$.

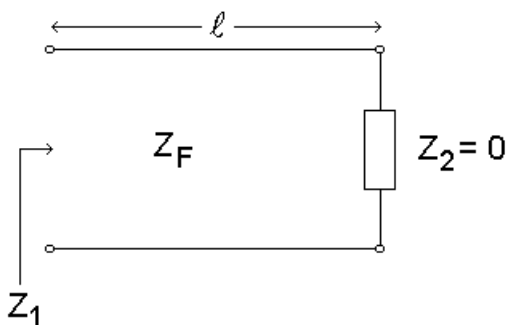


$$R_1 \cdot R_2 = m \cdot Z_L \cdot \frac{Z_L}{m} = Z_L^2,$$

$$R_1 = \frac{Z_L^2}{R_2}.$$

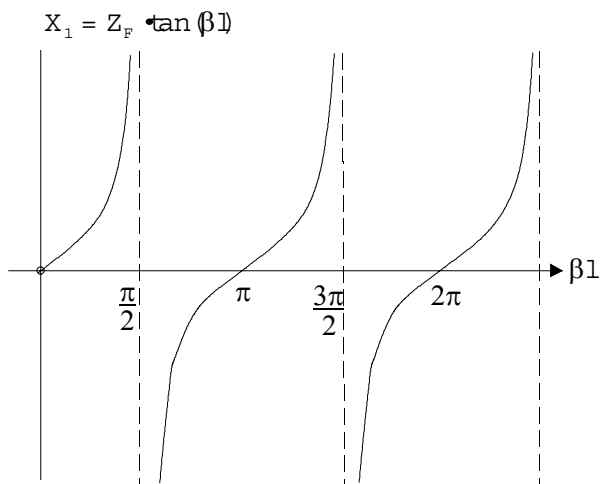
(4.2.7.1)

Wellenleiter als Blindwiderstände: Nach (4.2.4.4) gilt für den kurzgeschlossenen Wellenleiter, d.h. $r_0 = -r_0 = -1$, $m = 0$,



$$Z_1 = Z_F \cdot \frac{m + j \cdot \tan(\beta l)}{1 + j \cdot m \cdot \tan(\beta l)} = Z_F \cdot j \cdot \tan(\beta l).$$

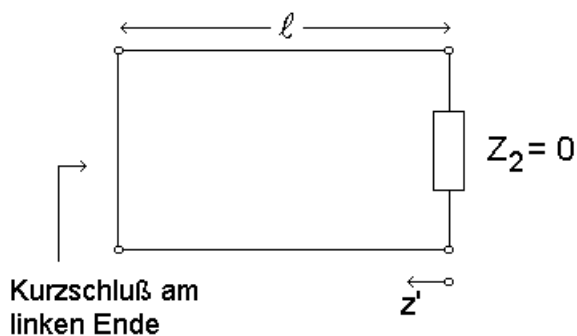
(4.2.7.2)



$\beta l \sim l$ bei $f = \text{const.}$,

$\beta l \sim f$ bei $l = \text{const.}$

Resonator: Ein beidseitig kurzgeschlossener Wellenleiter der Länge l ist bei jenen Frequenzen in Resonanz, bei denen die Impedanz Z_2 am rechten Ende in die Impedanz 0 am linken Ende transformiert wird. Bei Resonanz gilt also

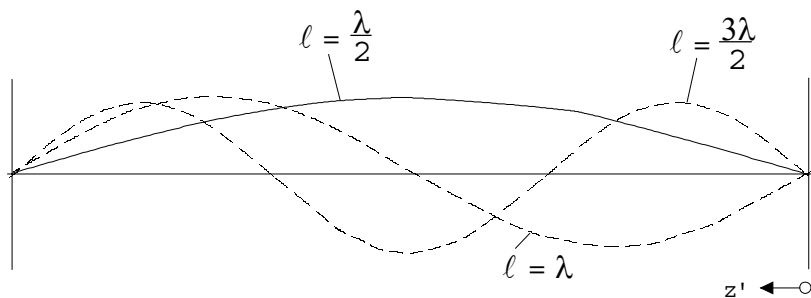


$\beta l = \pi, 2\pi, 3\pi, \dots$

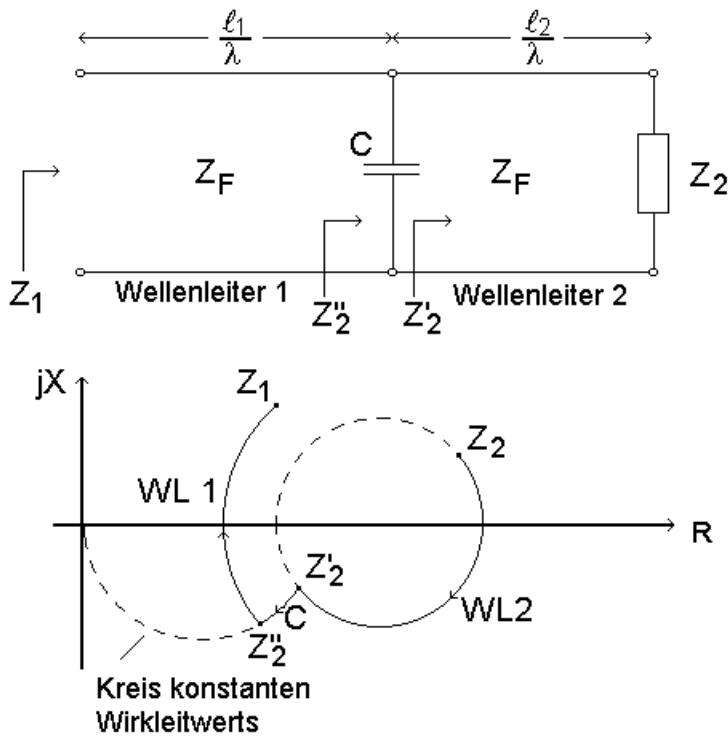
$l = \frac{\lambda}{2}, \lambda, \frac{3\lambda}{2}, \dots$

$f_R = \frac{v_p}{2l}, \frac{v_p}{l}, \frac{3v_p}{2l}, \dots$

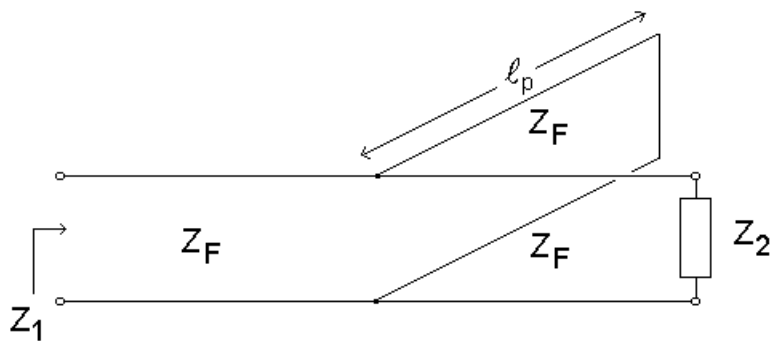
Momentane elektrische Feldstärke:



Beispiel:



In obiger Schaltung könnte der Kondensator durch eine kurzgeschlossene Leitung ersetzt bzw. realisiert werden:



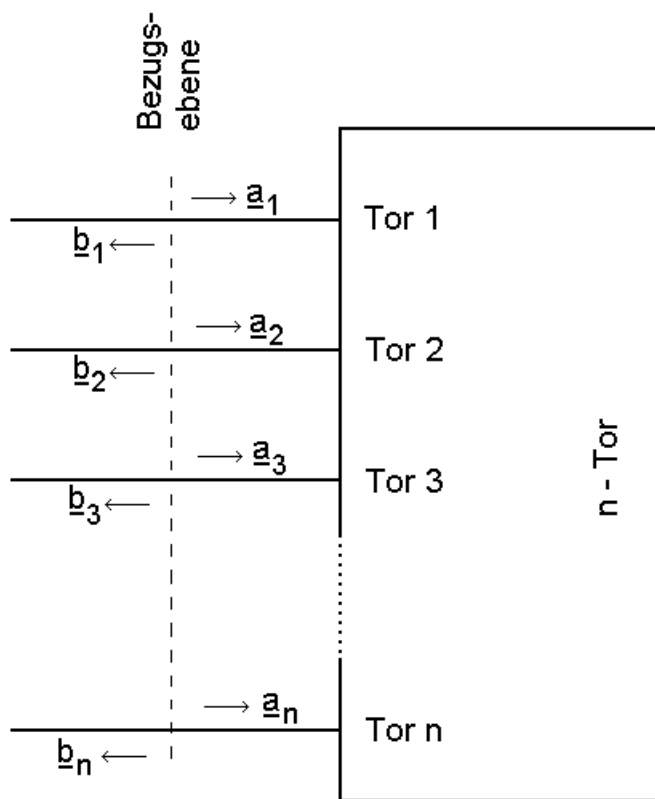
$$X_p = Z_F \cdot \tan(\beta l_p), \quad \frac{\lambda}{4} < l_p < \frac{\lambda}{2} \rightarrow X_p < 0 \quad (\text{kapazitiv}) .$$

5. Wellenmäßige Beschreibung von n-Toren mit der Streumatrix

5.1. n-Tor, Streumatrix, Signalflußdiagramm

n-Tor: Münden in einen Bereich n Wellenleiter, so wird dieser Bereich als n-Tor bezeichnet.

Im allgemeinen Betriebsfall läuft in jedem der n Tore eine Wellenleiterkomplexer Amplitude \underline{a}_v ein und aus jedem Tore eine Wellenleiterkomplexer Amplitude \underline{b}_v aus.



\underline{a}_v und \underline{b}_v sind in der jeweiligen Bezugsebene definiert.

\underline{a}_v und \underline{b}_v seien so gewählt, daß die Leistung der zulaufenden Wellen

$$P_{a_v} = \frac{|\underline{a}_v|^2}{2} = \frac{a_v^2}{2} \quad (5.1.1)$$

und daß die Leistung der ablaufenden Wellen

$$P_{b_v} = \frac{|\underline{b}_v|^2}{2} = \frac{b_v^2}{2} \quad (5.1.2)$$

ist. Die von n-Torrennetto aufgenommene Wirkleistung ist

$$P_W = \frac{1}{2} \cdot \sum_{v=1}^n (a_v^2 - b_v^2). \quad (5.1.3)$$

Mit den Vektoren

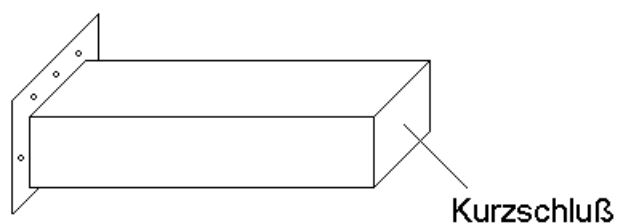
$$\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (5.1.4) \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (5.1.5)$$

entsteht aus (5.1.3)

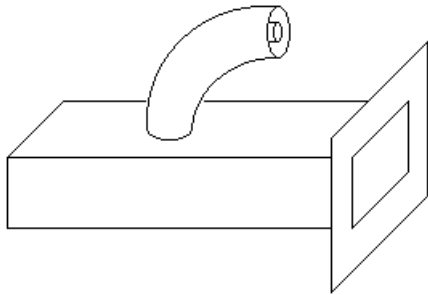
$$P_W = \frac{1}{2} \left[(\underline{a}^*)^T \cdot \underline{a} - (\underline{b}^*)^T \cdot \underline{b} \right]. \quad (5.1.6)$$

Beispiele von n-Toren:

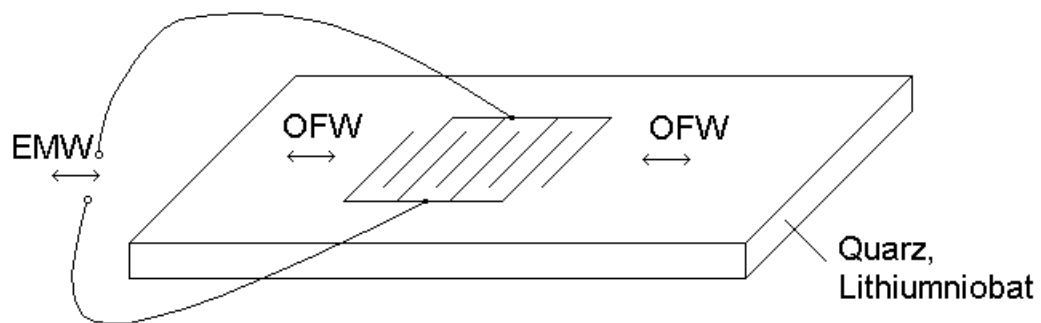
Kurzgeschlossener Hohlleiter, 1-Tor:



Adapter Koaxialeitung-Hohlleiter, 2-Tor:



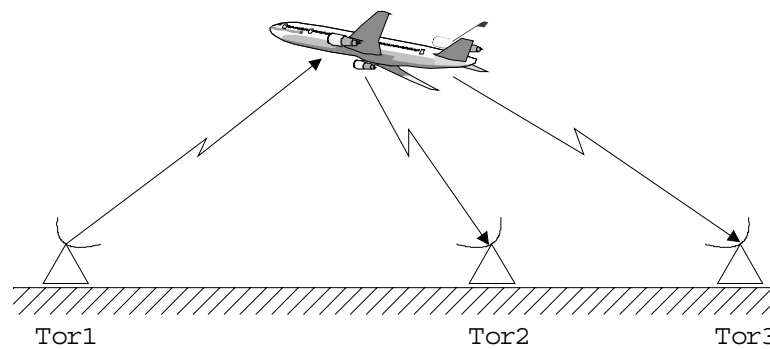
Elektroakustischer Interdigitalwandler, 3-Tor:



EMW : elektromagnetische Welle

OFW : Akustische Oberflächenwelle
(engl. surface acoustic wave)

Multistatisches Radar, 3-Tor:

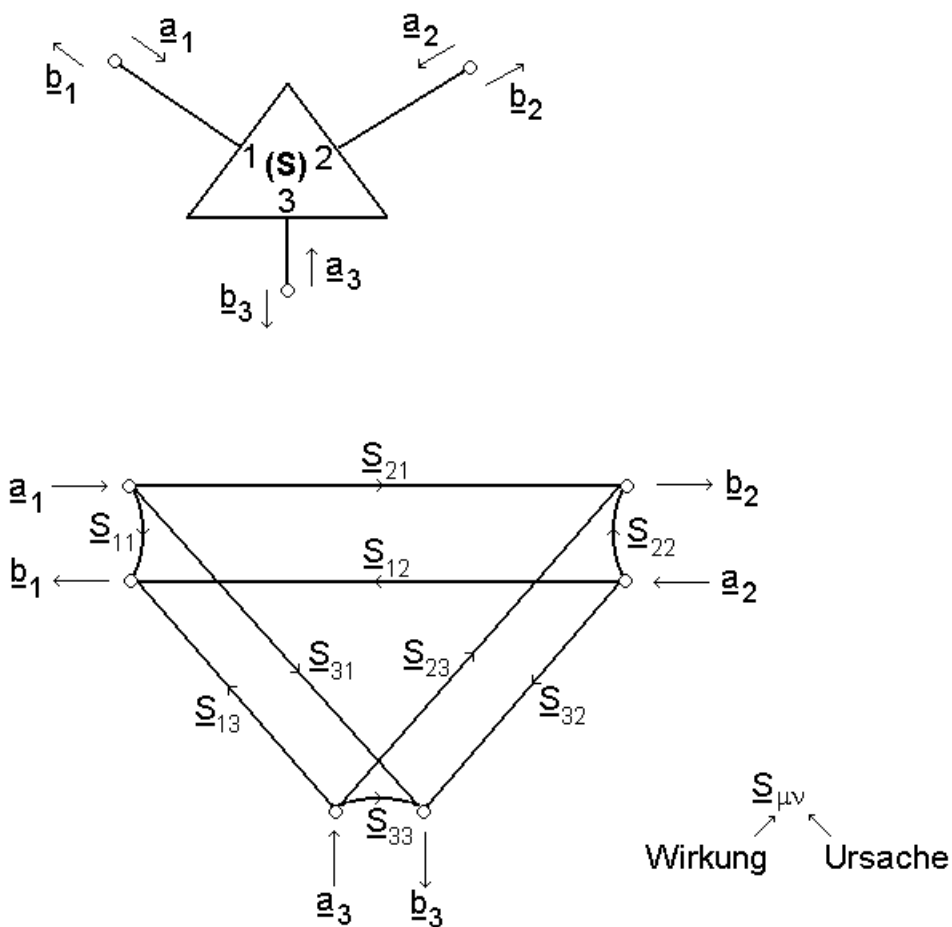


Streumatrix: Die am Tor ν einlaufende Welle wird durch das n -Torgestreut, so daß in jedem Tor $\nu=1 \dots n$ einlaufende Wellen an allen $\nu=1 \dots n$ Toren entstehen. Wenn an allen Toren Wellen einlaufen, so überlagern sich die auf die einzelnen einlaufenden Wellen zurückgehenden ablaufenden Wellen linear, falls das n -Tor linear ist. Linearität sei im folgenden vorausgesetzt. Der Zusammenhang zwischen zu- und ablaufenden Wellen wird durch die Streumatrix (S) beschrieben:

$$\begin{pmatrix} \underline{b}_1 \\ \underline{b}_2 \\ \vdots \\ \underline{b}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{S}_{11} & \underline{S}_{12} & \dots & \underline{S}_{1n} \\ \underline{S}_{21} & & & \vdots \\ \vdots & & & \\ \underline{S}_{n1} & \dots & & \underline{S}_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \underline{a}_1 \\ \underline{a}_2 \\ \vdots \\ \underline{a}_n \end{pmatrix}, \tag{5.1.7}$$

$$\underline{b} = \underline{S} \cdot \underline{a}. \tag{5.1.8}$$

Signalflußdiagramm: Die Bedeutung der Elemente $\underline{S}_{\mu\nu}$ der Streumatrix (S) kann durch ein Signalflußdiagramm veranschaulicht werden. Dies soll anhand eines 3-Tors gezeigt werden:



Signalflußdiagramm

Verlustfreie passives n-Tor: Verlustfreie passive n-Tore nehmen keine Leistung auf und geben keine Leistung ab, d.h. aus (5.1.6) folgt

$$\underline{a}^*)^T \cdot \underline{a} = \underline{b}^*)^T \cdot \underline{b}. \quad (5.1.9)$$

Aus (5.1.9) folgt mit (5.1.8)

$$\underline{a}^*)^T \cdot \underline{a} = \underbrace{(\underline{a}^*)^T \cdot \underline{S}^*)^T}_{\underline{b}^*)^T} \cdot \underbrace{\underline{S}}_{\underline{b}} \cdot \underline{a}. \quad (5.1.10)$$

Aus (5.1.10) folgt, daß gelten muß

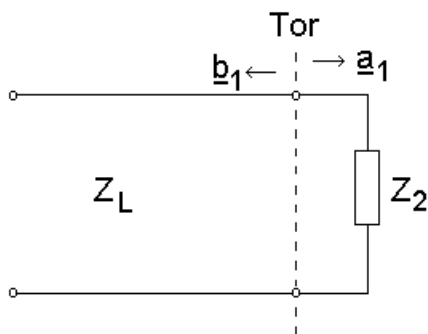
$$\underline{S}^*)^T \cdot \underline{S} = \underline{E}, \quad (5.1.11)$$

wobei \underline{E} die Einheitsmatrix ist.

Reziprokes Zweitor: Bei reziproken Zweitoren gilt $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$.

Beispiele für Streumatrizen: Ohne Einschränkung der Allgemeingültigkeit werden Zweitorsystemen betrachtet.

Einort:



In der Bezugsebene ist

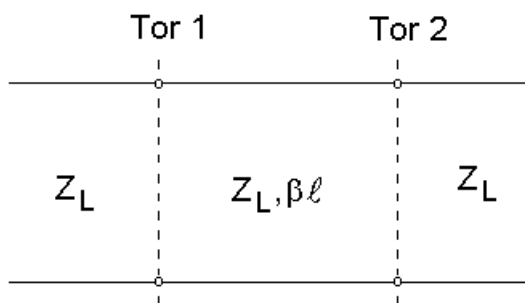
$$\frac{\underline{U}_R}{\underline{U}_G} = \underline{\Gamma} = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L}.$$

$$\underline{a}_1 = \frac{U_G}{\sqrt{Z_L}}, \quad \underline{b}_1 = \frac{U_R}{\sqrt{Z_L}},$$

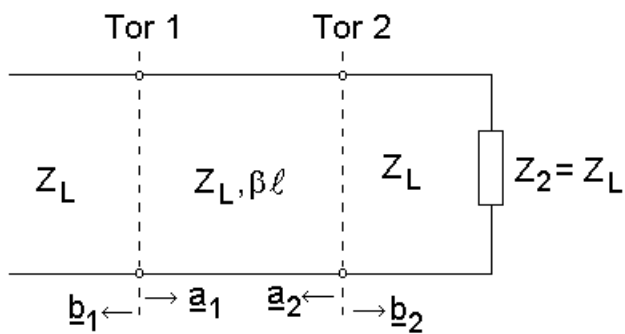
$$\underline{b}_1 = \underline{r} \cdot \underline{a}_1 = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L} \cdot \underline{a}_1,$$

$$\underline{S} = \underline{S}_{11} = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L}. \quad (\text{Reflexionsfaktor})$$

Leitungsstück als Zweitor:



Spezieller Betriebszustand:



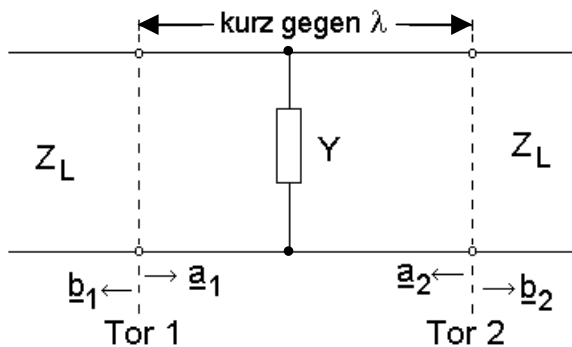
$$\begin{aligned} \underline{a}_2 = 0 &\rightarrow \underline{b}_2 = \underline{a}_1 \cdot \underline{S}_{21} = \underline{a}_1 \cdot e^{-\beta \ell} \\ &\rightarrow \underline{b}_1 = 0 \rightarrow \underline{S}_{11} = 0 \end{aligned}$$

Aus Symmetriegründen: $\underline{S}_{22} = \underline{S}_{11}$, $\underline{S}_{12} = \underline{S}_{21}$, somit

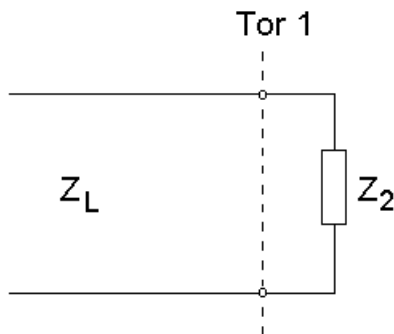
$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & e^{-\beta \ell} \\ e^{-\beta \ell} & 0 \end{pmatrix}.$$

Parallelwert als Zweitor:

2004-02-09



Spezieller Betriebszustand:



wobei

$$Z_2 = \frac{1}{Y + \frac{1}{Z_L}} = \frac{Z_L}{1 + Y \cdot Z_L}$$

$$\underline{S}_{11} = \frac{\underline{b}_1}{\underline{a}_1} = \underline{r} = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L} = \frac{\frac{Z_L}{1 + Y \cdot Z_L} - Z_L}{\frac{Z_L}{1 + Y \cdot Z_L} + Z_L} = \frac{-Y \cdot Z_L}{2 + Y \cdot Z_L},$$

$$\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22},$$

$$\begin{aligned} \underline{b}_2 &= \underline{a}_1 \cdot \underline{S}_{21} = \underbrace{\underline{a}_1 + \underline{b}_1}_{\substack{\text{gleiche Ebene} \\ \text{wie } \underline{b}_2}} = \underline{a}_1 \cdot (1 + \underline{S}_{11}) \\ &= \underline{a}_1 \cdot \left(1 + \frac{-Y \cdot Z_L}{2 + Y \cdot Z_L} \right) = \underline{a}_1 \cdot \underbrace{\frac{2}{2 + Y \cdot Z_L}}_{\underline{S}_{21}}, \end{aligned}$$

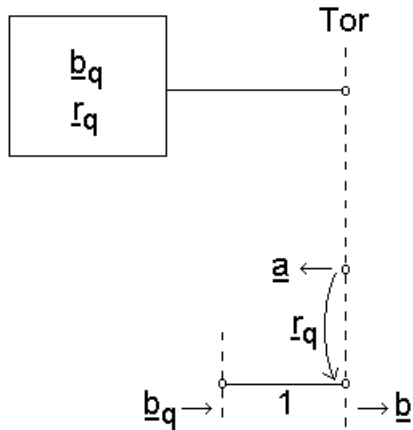
$$\underline{S}_{21} = \underline{S}_{12} = \frac{2}{2 + Y \cdot Z_L},$$

$$\underline{S} = \frac{1}{2 + Y \cdot Z_L} \cdot \begin{pmatrix} -Y \cdot Z_L & 2 \\ 2 & -Y \cdot Z_L \end{pmatrix}.$$

5.2. Eintrickle

2005-02-11

Die einfachste Quelle einer Welle ist die Eintrickle.



\underline{b}_q : komplexe Amplitude der U-welle

\underline{r}_q : Reflexionsfaktor der Eintrickle

Bei ein und derselben Eintrickle hängen \underline{b}_q und \underline{r}_q von den Eigenschaften des Wellenleiters (Feldwellenwiderstand, Wellenwiderstand) ab, an den die Quelle angeschlossen ist.

Die aus der Quelle austretende Welle hat die komplexe Wellenamplitude

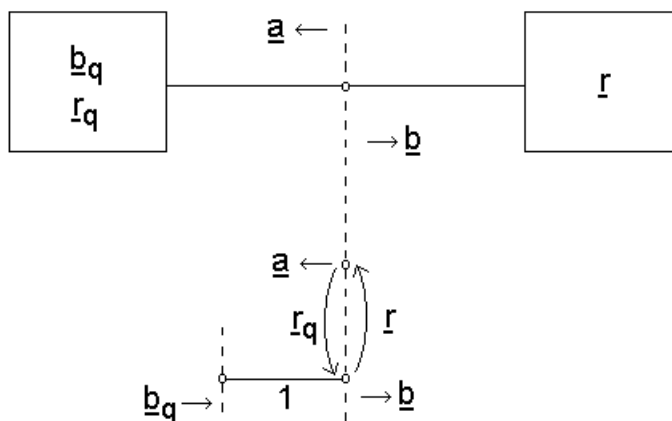
$$\underline{b} = \underline{b}_q + \underline{r}_q \cdot \underline{a} \quad (5.2.1)$$

Die Quelle gibt die Wirkleistung

$$P_w = \frac{1}{2}(\underline{b}^2 - \underline{a}^2) \quad (5.2.2)$$

ab.

Kombination von Eintrickle und Abschluss:



Quelle, siehe (5.2.1):

$$\underline{b} = \underline{b}_q + \underline{r}_q \cdot \underline{a} .$$

Abschluß:

$$\underline{a} = \underline{r} \cdot \underline{b} . \quad (5.2.3)$$

Aus (5.2.1) und (5.2.3) folgt

$$\underline{b} = \underline{b}_q + \underline{r}_q \cdot \underline{r} \cdot \underline{b} ,$$

$$\underline{b} = \frac{\underline{b}_q}{1 - \underline{r}_q \cdot \underline{r}} . \quad (5.2.4)$$

(5.2.4) eingesetzt in (5.2.3) ergibt

$$\underline{a} = \underline{r} \cdot \underline{b} = \frac{\underline{r} \cdot \underline{b}_q}{1 - \underline{r}_q \cdot \underline{r}} . \quad (5.2.5)$$

\underline{b} nach (5.2.4) und \underline{a} nach (5.2.5) in (5.2.2) eingesetzt ergibt die von der Quelle abgegebene Wirkleistung zu

$$P_w = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) = \frac{1}{2} \cdot \frac{b_q^2 (1 - r^2)}{|1 - r_q \cdot r|^2} . \quad (5.2.6)$$

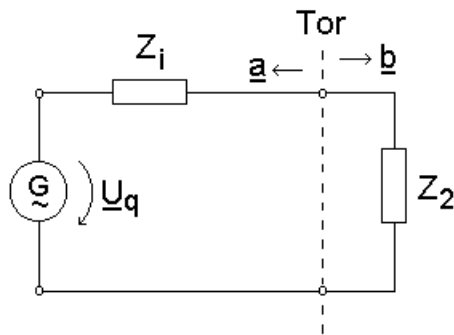
An dem Ausdruck (5.2.4) ist bemerkenswert, daß b gleich b_q wird, wenn nur einer der beiden Reflexionsfaktoren \underline{r}_q und \underline{r} nullwird. Dies kann anschaulich folgendermaßen erklärt werden:

- Wenn \underline{r}_q gleich null ist, so wird die vom Abschlußtor aufgrund des Einlaufens der Umwelt reflektierte Welle von der Eintrittsquelle absorbiert. Die vom Abschlußtor reflektierte Welle führt also nicht zu einer sich der Umwelt überlagernden, aus der Eintrittsquelle austretenden Welle.
- Wenn \underline{r} gleich null ist, so führt das Einlaufen der Umwelt in das Abschlußtor nicht zu einer vom Abschlußtor reflektierten Welle. Auch wenn \underline{r}_q ungleich null ist, gibt also die Eintrittsquelle keine sich der Umwelt überlagernde Welle ab.

Im Fall $\underline{r}_q = \underline{r} = 1$, was in Fall der hier exemplarisch betrachteten Zweileitersysteme verschwindende Werte des Innenwiderstands der Quelle und des Außenwiderstands impliziert, folgen aus (5.2.4) und (5.2.5) formal $\underline{b} \rightarrow \infty$ bzw. $\underline{a} \rightarrow \infty$. Dies bedeutet allerdings, dass eine Quelle verschwindenden Innenwiderstands an einem Kurzschluß Spannung erzeugen würde, was physikalisch nicht möglich ist.

Beispiel:

2001-12-14



$$\begin{aligned} \underline{U}_q &= j10 \text{ V} \\ Z_i &= j50 \Omega \\ Z_2 &= 25 \Omega \\ Z_L &= 50 \Omega \quad (\text{Bezugsin pedanz}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{b}_q &= \frac{\underline{U}_q \cdot Z_L}{Z_i + Z_L} \cdot \frac{1}{\sqrt{Z_L}} = \frac{\underline{U}_q \cdot \sqrt{Z_L}}{Z_i + Z_L} = \frac{j10\sqrt{50}\sqrt{W}}{j50 + 50} = \frac{j10}{\sqrt{50} \cdot 2} (1 - j\sqrt{W}) = \\ &= (0,707 + j0,707)\sqrt{W} , \end{aligned}$$

$$\underline{r}_q = \frac{Z_i - Z_L}{Z_i + Z_L} = \frac{j50 - 50}{j50 + 50} = \frac{j-1}{j+1} = j$$

$$\underline{r} = \frac{Z_2 - Z_L}{Z_2 + Z_L} = \frac{25 - 50}{25 + 50} = -\frac{1}{3} .$$

W egen (5.2.4)

$$\begin{aligned} \underline{b} &= \frac{\underline{b}_q}{1 - \underline{r}_q \cdot \underline{r}} = \frac{0,707(1 + j\sqrt{W})}{1 - j(-\frac{1}{3})} \\ &= \frac{0,707(1 + j)(1 - \frac{j}{3})\sqrt{W}}{1 + \frac{1}{9}} = (0,847 + j0,425)\sqrt{W} , \end{aligned}$$

$$\underline{a} = \underline{r} \cdot \underline{b} = -\frac{1}{3} (0,847 + j0,425)\sqrt{W} = (-0,283 - j0,142)\sqrt{W} ,$$

$$P_W = \frac{1}{2} (b^2 - a^2) = \frac{1}{2} (|0,847 + j0,425|^2 - |-0,283 - j0,142|^2) = 0,4 \text{ W} .$$

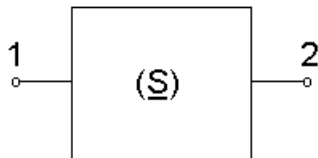
Probe:

$$P_W = \frac{U_q^2 \cdot Z_2^2}{2 \cdot |Z_i + Z_2|^2 \cdot Z_2} = \frac{U_q^2 \cdot Z_2}{2 \cdot |Z_i + Z_2|^2} = \frac{100 \cdot 25 \text{ W}}{2 \cdot (2500 + 625)} = 0,4 \text{ W} .$$

5.3. Spezielle Mehrport

Im folgenden geht es um die formale Beschreibung der Mehrport durch die Streumatrix und nicht um die physikalische Erklärung der Funktionsweise.

Zunächst werden Zweiporte betrachtet.



Idealer Phasenschieber:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} &= 0 && \text{(keine Eigenreflexion),} \\ |\underline{S}_{12}| = |\underline{S}_{21}| &= 1 && \text{(keine Übertragungsdämpfung),} \\ \arg(\underline{S}_{12}) &= \arg(\underline{S}_{21}) && \text{vorgebar oder einstellbar.} \end{aligned}$$

Ideales Dämpfungsglied:

$$\begin{aligned} \underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} &= 0 && \text{(keine Eigenreflexion),} \\ 0 \leq |\underline{S}_{12}| = |\underline{S}_{21}| &\leq 1 && \text{vorgebar oder einstellbar,} \\ \arg(\underline{S}_{12}) = \arg(\underline{S}_{21}) &= \text{const} && \text{(unabhängig von } |\underline{S}_{12}| \text{).} \end{aligned}$$

Ideale Einwegleitung (Uniline):

$$\begin{aligned} \underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} &= 0 && \text{(keine Eigenreflexion),} \\ |\underline{S}_{21}| &= 1 && \text{(keine Übertragungsdämpfung vom Tor1 zum Tor2),} \\ |\underline{S}_{12}| &= 0 && \text{(unendliche Übertragungsdämpfung vom Tor2 zum Tor1).} \end{aligned}$$

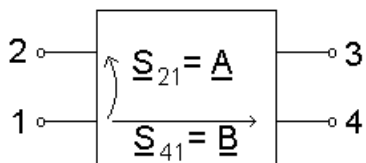
Die Einwegleitung ist ein nicht-reziprokes Bauelement. Ihre Funktion beruht auf den richtungsabhängigen Eigenschaften vom magnetisierter Ferrite (Faraday-Effekt, Drehung der Polarisation in einem vom magnetisierten Ferrit, Zinke/Brunswig S.366 ff (5. Auflage)).

IdealerVerstärker:

$\underline{S}_{11} = \underline{S}_{22} = 0$ (keine Eigenreflexion),
 $|\underline{S}_{21}| > 1$ (Verstärkung),
 $\underline{S}_{12} = 0$ (keine Rückwirkung vom Tor2 zum Tor1).

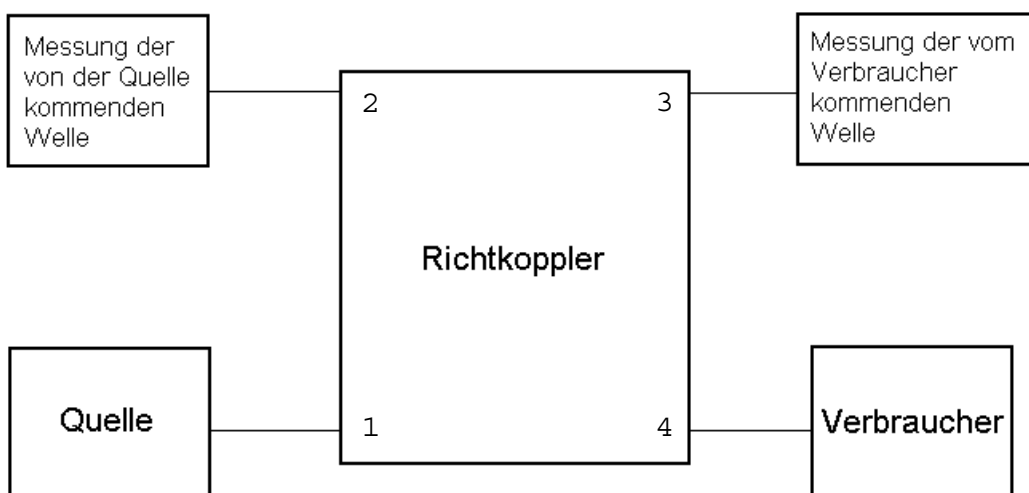
IdealerRichtkoppler:

Als Vierter wird ein idealer Richtkoppler betrachtet.



$$\underline{S} = \begin{pmatrix} 0 & \underline{A} & 0 & \underline{B} \\ \underline{A} & 0 & \underline{B} & 0 \\ 0 & \underline{B} & 0 & \underline{A} \\ \underline{B} & 0 & \underline{A} & 0 \end{pmatrix}.$$

Anwendungsbeispiel: $|\underline{A}| \ll |\underline{B}|$, z.B. $|\underline{A}| = 0,1 |\underline{B}|$.



Richtdämpfung:

$$a_r/\text{dB} = 20 \lg \left(\left| \frac{S_{21}}{S_{31}} \right| \right). \quad (5.3.1)$$

Kopplämpfung:

$$a_k/\text{dB} = -20 \lg \left(|S_{21}| \right). \quad (5.3.2)$$

Literatur

J. Detlefsen, U. S. Hart: Grundlagen der Hochfrequenztechnik

H. H. Meinke: Einführung in die Elektrotechnik höherer Frequenzen, Bd. I und II

O. Zinke, H. Brunswig: Lehrbuch der Hochfrequenztechnik, Bd. I

H. H. Meinke, F. W. Gundlach: Taschenbuch der Hochfrequenztechnik

J. A. Stratton: Electromagnetic Theory

H. G. Unger: Hochfrequenztechnik in Funk und Radar

H. G. Unger: Elektromagnetische Wellen, Bd. I und II

H. Ambrüster, G. Grünberger: Elektromagnetische Wellen im Hochfrequenzbereich -
Grundlagen, Ausbreitung, Geräte

H. Ambrüster: Elektromagnetische Wellen im Hochfrequenzbereich - Anwendungen

E. Stadler: Hochfrequenztechnik

G. Lehner: Elektromagnetische Feldtheorie für Ingenieure und Physiker